ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
90

For Senior & Graduate Courses

アインシュタイン方程式

一般相対性理論のよりよい理解のために

◆

白水 徹也　著



サイエンス社

SGC ライブラリ- 90

アインシュタイン方程式

一般相対性理論のよりよい理解のために

白水 徹也　著

サイエンス社

まえがき

アインシュタインが一般相対性理論を提唱してから約100年が経ようとしている．しかし，これまでにアインシュタイン方程式以上に美しい方程式を人類は手にしていない．一般相対性理論において，時空は湾曲した幾何学で記述され，ブラックホールの存在，膨張宇宙などを予言し，それらは部分的ではあるものの観測実験で検証されているのは驚くべきことである．時空を記述する理論を人類は有しているのである！

当初異端児扱いを受けていたブラックホールも今では宇宙物理学にとどまらず幅広い分野でニーズが広がっているように思われる．そればかりか中心的な話題を提供している．これは1998年にマルダセナ (Maldacena) が提唱した adS/CFT 対応予想によるところが大きい．この予想によれば，高次元時空の一般相対性理論はより低次元の物質の理論と等価であることを主張している．特に，摂動論が適用できない物質の理論の強結合の振る舞いが重力サイドの摂動論で記述されることが多くの研究者を魅了しているようである．しかし，これまでの100年間で得られた素晴らしい一般相対性理論の成果が十分広く利用されているとは言い難い状況であるというのも事実である．

一方で，宇宙の精密観測が進んだ結果，現在の宇宙は加速的に膨張することが分かってきている．2011年にこの加速膨張発見の成果にノーベル賞が贈られている．アインシュタイン方程式が正しいとすると，宇宙を加速するためには特殊な「物質」が必要である．その代表例は宇宙定数（宇宙項）であるが，よりエキゾチックな物質の可能性もある．また，重力理論としてのアインシュタイン理論に補正を加えるという選択肢も存在する．どちらが正しいか，あるいはどちらも正しくないのか現時点では分からない．しかし，これまでアインシュタイン理論から得られた輝かしい成果と同レベルのものを，いずれからも期待するのは難しそうである．

これらの状況を考慮し，これまで得られた一般相対性理論の美しい成果を包括的にまとめ，継承することが本書の目的の一つでもある．理論構築を行うのであれば，本書で紹介するような一般相対性理論と同質，あるいはそれ以上の成果を目指してほしい．そこで本書では日本の標準的な教科書で取り上げない話題を取り上げている．一方で星の内部解，重力波などは重要ではあるが割愛することにした．

最後に草稿の段階で貴重な意見を頂いた京都大学学部4年生の須田武憲君，山下泰穂君に，沢山の誤植やミスを初校の校正の段階で指摘して頂いた大学院修士1年生の榊原由貴君に感謝します．

2012年3月洛西にて

白水 徹也

記号表

1) ギリシア文字の添字 $\mu, \nu \cdots$　時空全体の座標.

2) i 以降のラテン小文字の添字 $i, j, k \cdots$　空間座標.

3) a から h までのラテン小文字の添字 $a, \cdots, h \cdots$　ウォルトの抽象添字（1.6 節）.

4) $\partial_\mu \cdots$　偏微分の $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ の略記.

5) $\nabla_\mu \cdots$　共変微分.

6) $g_{\mu\nu} \cdots$　時空計量．符号は $(-,+,+,+,\cdots)$．$g^{\mu\nu}$ はその逆行列.

7) $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \cdots$　クリストッフェル記号．$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$ で定義.

8) $R_{\mu\nu\alpha\beta} \cdots$　リーマンテンソル．$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V_\alpha = R_{\mu\nu\alpha\beta} V^\beta$ で定義.

目　次

第 1 章
相対性理論とリーマン幾何学

本章では相対性理論の原理とそれを表現する数学的枠組みであるところのリーマン幾何学について解説を行う．

1.1 一般相対性原理と等価原理

1905 年に特殊相対性理論を構築したアインシュタインは，加速度系にも拡張することを試みた．なぜなら慣性系で定式化されている特殊相対性理論では我々が日常から体感している重力すら記述できないからである．特殊相対性理論では，特殊相対性原理「慣性系同士の移り変わりで物理法則は変更を受けない」が物理法則を理解する中心的存在である．これを素直に一般化すると**一般相対性原理**「どの座標系からみても物理法則は不変である」ということになる．任意の系を考えると，加速度運動している系も自然に含まれることになる．

さて自由落下の思考実験から重力がその中で消せることを知っている．局所的にはミンコフスキー時空になる．これを原理に格上げしたものが**等価原理**である．この等価原理と一般相対性原理を一挙に数学的に表現できる数学的道具があることを我々は知っている．これがリーマン幾何学である．

本章では一般相対性理論を記述するために必要なリーマン幾何学の最小限の知識の習得を行う．まずはウォーミングアップとしてユークリッド幾何学（1.2 節），ミンコフスキー時空（1.3 節）についてみてゆこう．1.3 節では特殊相対性理論の簡単な導入を行う．

1.2 ユークリッド幾何学

1.2.1 ユークリッド計量とガリレイ変換

ニュートン力学はユークリッド空間上で定式化されている．直交座標 x, y, z を用いて微小距離離れた空間の 2 点間の距離（計量）は

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \tag{1.1}$$

で与えられる．i, j は空間座標の添字であり，1～3 まで走る．ここでは $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ としよう．上の計量のように同じ添字がある場合は，1 から 3 まで和をとる約束をする（アインシュタインの縮約則）．

この計量を不変に保つ線形変換をガリレイ変換と呼ぶ．この変換は要するに静止している系とそれに対して等速運動している系の間の変換である．数学的に表現すると，$x'^i = \Lambda^i_j x^j$ となるが，計量の不変性から

$$dl^2 = \delta'_{ij} dx'^i dx'^j = \delta'_{ij} \Lambda^i_k \Lambda^j_l dx^k dx^l = \delta_{kl} dx^k dx^l \tag{1.2}$$

が成り立つ．よって，変換係数 Λ^j_i に対して条件

$$\delta_{ij} = \Lambda^k_i \Lambda^l_j \delta'_{kl} \tag{1.3}$$

が課される．

1.2.2 スカラー，ベクトル，テンソル

ニュートン力学では物理量はこの空間上のスカラー，ベクトル，テンソルという量で表現される．スカラー量はガリレイ変換に対して

$$S'(x') = S(x) \tag{1.4}$$

とふるまう量である．ここで引数の x は (x, y, z) を省略した記法である．ベクトルは

$$V^i(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} V^j(x) \tag{1.5}$$

とふるまう量として定義される．テンソルは

$$T'^{i_1 \cdots i_n}(x') = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x'^{i_n}}{\partial x^{j_n}} T^{j_1 \cdots j_n}(x). \tag{1.6}$$

これまで計量は直交座標で表現され，ガリレイ変換はその直交座標系で表現された座標系間の変換則に制限されたものとして定義された．しかし，どの座標系で考えるかは自由である．例えばニュートン力学においても回転系や極座標を用いて考察をすることによって系によっては理解しやすい場合がある．そこで一般座標系 $\{y^i\}$ に対しても計量を書いておこう．

$$dl^2 = g_{ij} dy^i dy^j. \tag{1.7}$$

1.5 節でもうすこし詳しく立ち入ることになるが，例えばベクトル自体は座標に依存する概念ではない．先ほど導入したベクトルは正確には正規直交系におけるベクトルの成分である．つまり，正規直交座標の基底ベクトル（各軸方向の単位ベクトル）を $\{e_i\}$ と書いておくと，ベクトルは

$$V = V^i e_i = V^1 e_1 + V^2 e_2 + V^3 e_3 \tag{1.8}$$

で定義される．

1.3 ミンコフスキー時空

1.3.1 ミンコフスキー計量とローレンツ変換

ある時間座標 t と空間座標 x^i が存在して，事象の 2 点間の距離，即ち計量が

$$ds^2 = -c^2dt^2 + \delta_{ij}dx^idx^j \tag{1.9}$$

で与えられる時空を**ミンコフスキー時空**という．ds は世界間隔とも呼ばれている．時間に光速をかけた $ct =: x^0$ を新しい座標として導入しておくと便利である．このとき計量は

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + \delta_{ij}dx^idx^j =: \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1.10}$$

である．ここで $\eta_{\mu\nu}$ は

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

この $\eta_{\mu\nu}$ を計量，あるいは計量テンソルと呼ぶ．本書では断りがない限り，ギリシア文字の添字は 4 次元座標を表し，小文字のラテン文字は 3 次元の空間座標を表す．また，同じ添字が繰り返している場合は和をとる（**アインシュタインの縮約則**）．

この空間の計量を不変に保つ線形変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ を**ローレンツ変換**と呼ぶ．ここで $\Lambda^\mu{}_\nu$ は定数行列．導入の仕方から

$$ds^2 = \eta'_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = \eta'_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{1.12}$$

が成り立ち，2 番目の等式から

$$\eta'_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \tag{1.13}$$

を満足することが要請される．

1.3.2 スカラー，ベクトル，テンソル

このローレンツ変換に対して物理量が不変であることを特殊相対性理論では要求する．物理量はスカラー，ベクトル，テンソルを用いて書くことができる．ローレンツ変換に対して

$$S'(x') = S(x) \tag{1.14}$$

のようにふるまうものを**スカラー**，

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}A^\nu(x) \tag{1.15}$$

とふるまうものを**反変ベクトル（ベクトルの成分）**，

$$A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) \tag{1.16}$$

とふるまうものを**共変ベクトル（形式の成分）**と呼ぶ．また，これらを拡張した概念として

$$\begin{aligned} &T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_q}(x') \\ &\quad = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \\ &\qquad \times \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}(x) \end{aligned} \tag{1.17}$$

とふるまうものを (p,q) 階のテンソルと呼ぶ．

1.3.3 因果構造

ユークリッド空間と異なり，時空は因果構造を持つ．その結果，自然にミンコフスキー時空のベクトルは次のように分類される．ある点 p のベクトル V^μ を考える．このとき

(i) 時間的ベクトル

$$\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu < 0 \tag{1.18}$$

を満たすものを時間的ベクトルと呼ぶ．またその方向を時間的向きと呼ぶ．時間的なベクトルの場合，さらに未来向きと過去向きのものに分けられる．

(ii) 空間的ベクトル

$$\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu > 0 \tag{1.19}$$

を満たすものを空間的ベクトル，そしてその方向を空間的向きと呼ぶ．

(iii) 光的（ヌル）ベクトル

$$\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 0 \tag{1.20}$$

を満たすものを光的ベクトル，そしてその方向を光的向きと呼ぶ．

時間的ベクトルと光的ベクトルをまとめて因果的ベクトルと呼ぶこともある．

光よりも速く伝播する粒子は存在しないため，質量を持つ粒子は時間的方向に運動する．また質量を持たない光のような粒子は光的方向に運動する．また，ミンコフスキー時空では過去に向かうような軌道も存在しない．

1.3.4 相対性原理と運動方程式

物理法則はローレンツ変換に依存しない（**特殊相対性原理**）．従って，運動方程式はテンソル場で表現されるべきである．ここでは具体的な例として，自由粒子と電磁場について考察してみよう．

(i) 自由粒子

自由粒子に関連したローレンツ変換に対して不変な量は世界間隔 ds であろう．そこで自由粒子に対する作用を

$$S = -mc\int_{\rm orbit} ds = -mc\int_{\rm orbit}\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu(t)dx^\nu(t)} \tag{1.21}$$

としてみよう．ここで t はある時間パラメータであり，粒子の軌道を $x^\mu = x^\mu(t)$ とした．係数 mc はニュートン力学を再現するようにとっている．c は光速，m は粒子の質量である．これをすこし書き直すと

$$S = -mc^2\int\sqrt{1-\frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2}{c^2}}dt. \tag{1.22}$$

ここで「$\cdot$」は時間座標 t による微分である．粒子の速さが光速よりも十分遅いとすると，$|\dot{x}^\mu/c| \ll 1$ であり，平方根の中身を展開すると

$$S \simeq -mc^2\int\left(1-\frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2}{2c^2}\right)dt \tag{1.23}$$

となる．第 1 項は定数なので，運動方程式には寄与しない．従って，近似的にラグランジアンは

$$L \simeq \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 \tag{1.24}$$

となって，確かにニュートン力学の自由粒子のものに一致している．

(ii) 電磁場

次に電磁場を支配するマクスウェル方程式の導出を試みよう．4 次元ポテンシャルを A_μ とし

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.25}$$

によって場の強さを導入する．電磁場は時間と空間を分解することで得られる．そこで 4 元ポテンシャルを

$$A_\mu dx^\mu = -\frac{\phi}{c}dx^0 + A_i dx^i \tag{1.26}$$

と書き下してみよう．ϕ がポテンシャル，A_i がベクトルポテンシャルである．次に，場の強さから電場 E_i と磁場 B_i の成分は

$$E_i = -cF_{0i} = -c\Big(\partial_0 A_i + \partial_i(\phi/c)\Big) = -\partial_i\phi - \dot{A}_i \tag{1.27}$$

と

$$B_i = \frac{1}{2}\epsilon_i{}^{jk}F_{jk} = \epsilon_i{}^{jk}\partial_j A_k \tag{1.28}$$

と書けていることが分かる．ここで，$\partial_0 = \partial_{x^0} = c^{-1}\partial_t$ である．電場と磁場がひとつのテンソル $F_{\mu\nu}$ によって表現されている．

以上の準備をもとに電磁場の作用を

$$S_{\rm em} = -\frac{1}{4\mu_0}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^3x dt \tag{1.29}$$

と書く．ここで μ_0 は透磁率．これを A_μ について変分をとると

$$\begin{aligned}\delta S_{\rm em} &= -\frac{1}{2\mu_0}\int \partial_\mu \delta A_\nu F^{\mu\nu} d^3x dt \\ &= \frac{1}{2\mu_0}\int \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} d^3x dt \end{aligned} \tag{1.30}$$

となることから，真空中では方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{1.31}$$

を得る．また $F_{\mu\nu}$ の定義より，次の恒等式を満たす．

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \tag{1.32}$$

これらの二つの式でもって，真空中のマクスウェル方程式を構成する．

1.4 リーマン幾何学

距離が定義されている湾曲した空間を扱う．

1.4.1 計量と物理量

微小間隔は離れた 2 点間の距離が与えられ

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \tag{1.33}$$

と書けるとする．このとき，$g_{\mu\nu}(x)$ を計量テンソルと呼ぶ．ミンコフスキー時空と同様に，**一般座標変換** $x'^\mu = x'^\mu(x^\alpha)$ に対して

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{1.34}$$

とふるまうものをスカラー，

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \tag{1.35}$$

とふるまうものを**反変ベクトル（ベクトルの成分）**，

$$A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) \tag{1.36}$$

とふるまうものを**共変ベクトル（形式の成分）**と呼ぶ．また，これらを拡張した概念として

$$\begin{aligned} &T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_q}(x') \\ &\quad = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \\ &\qquad \times \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}(x) \end{aligned} \tag{1.37}$$

とふるまうものを (p,q) 階のテンソルと呼ぶ．成分自体はこのように座標変換

に依存しているが，テンソルそのものは座標変換に依存しないことに注意する．

反変ベクトルと共変ベクトルの間を計量を用いて自然に変換することができる．そのためにまず計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の逆行列 $g^{\mu\nu}$ を定義する．

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{1.38}$$

ベクトル間の変換は

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu}A^{\nu} \tag{1.39}$$

と

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu}A_{\nu} \tag{1.40}$$

によって導入される．従って，以下では反変ベクトルと共変ベクトルと区別することなく，単純にベクトルと呼ぶことにする．ベクトルの成分の添字が上についている場合は反変ベクトルと同じ変換則に従い，下についている場合は共変ベクトルと同じようにふるまう．

次に，種々の計算で便利でもあり，微小体積を定義する際にも有用なレビ・チビタテンソルの導入を行う．まず $\eta_{0123} = 1$ を満たす完全反対称「テンソル」$\eta_{\mu\nu\rho\sigma}$ を考えよう．テンソルと仮にここで呼んでいるが，実はこの量はテンソルではない．今の目的はこの種の量で共変的な量を定義することである．そこでこの「テンソル」の変換則を調べてみよう．まず $\eta_{\mu\nu\rho\sigma}$ の定義から

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\sigma}}\eta_{\alpha\beta\lambda\delta} = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\eta_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{1.41}$$

と書ける．すると

$$\eta_{\mu\nu\rho\sigma} = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\sigma}}\eta_{\alpha\beta\lambda\delta} \tag{1.42}$$

が成り立つ．この形を見ると，明らかに $\eta_{\mu\nu\rho\sigma}$ がテンソルでないことが分かる．因子 $\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)$ が余計である．ところで $g_{\mu\nu}$ の行列式を $g(x) = \det(g_{\mu\nu})$ と書くと，座標変換で

$$g'(x') = \left(\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right)^2 g(x) \tag{1.43}$$

と変換する．$g(x) \leq 0$ であることに注意し

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g}\,\eta_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{1.44}$$

と定義する．これがテンソルとしてふるまうことが直ちに分かる．これが**レビ・チビタテンソル**である．

あとの種々の計算で有用な公式を二つ紹介する．まず，計量の逆行列の定義から

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\sigma}}{\partial x^{\rho}} = -g^{\mu\sigma}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}. \tag{1.45}$$

また，行列式の定義から

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}} = g g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \tag{1.46}$$

が成り立つ．

1.4.2 共変微分と平行移動

運動方程式を記述するには物理量の微分の操作を明確にしておく必要がある．物理法則が共変であることを要請するわけであるから，テンソルの微分もテンソルとしてふるまうように微分を導入しなければならない．時空が曲がっている場合，この微分の導入も自明ではない．

しかし，まずはスカラー場 $\phi(x)$ の場合を考えよう．その微分を偏微分

$$\partial_{\mu}\phi(x) \tag{1.47}$$

であるとしてみよう．これがベクトル（共変ベクトルの成分）としてふるまうことは

$$\frac{\partial \phi(x')}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^{\nu}} \tag{1.48}$$

から直ちに分かる．

次に共変ベクトル V_{μ} に偏微分をとった $\partial_{\mu}V_{\nu}$ の変換則を考えてみよう．すると単純計算から

$$\begin{aligned} \partial'_{\mu}V'_{\nu} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\alpha}\Big(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} V_{\beta}\Big) \\ &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \partial_{\alpha}V_{\beta} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}} V_{\alpha} \end{aligned} \tag{1.49}$$

となる．右辺の第 2 項がなければ $\partial_{\mu}V_{\nu}$ はテンソルであるが，このままではテンソルではない．そこで**平行移動**の操作を導入し，$V_{\mu}(x)$ の点 $x + \Delta x$ までの微小距離の平行移動の結果を

$$\tilde{V}_{\mu}(x+\Delta x) = V_{\mu}(x) + \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}(x)\Delta x^{\rho} V_{\nu}(x) \tag{1.50}$$

と書くことにする．この $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ は**クリストッフェル記号**と呼ばれる．元のベクトルとのずれが Δx の 1 次となっていると考えるのは自然であろう．これは $x + \Delta x$ でのベクトルであるから，$V_{\mu}(x + \Delta x)$ との差もベクトルであると考えるべきである．この差から定義される微分を**共変微分**と呼ぶことにし

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}V_{\nu} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V_{\nu}(x+\Delta x) - \tilde{V}_{\nu}(x+\Delta x)}{\Delta x^{\mu}} \\ &= \partial_{\mu}V_{\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}V_{\alpha} \end{aligned} \tag{1.51}$$

と書くことにする．

さて，$\nabla_{\mu}V_{\nu}$ がテンソルとしてふるまうことは未確認である．しかし，$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ が何者か分からない現時点では確認しようがない．ではどうするのか．実はこ

れは確認することではなく，テンソルとしてふるまうように $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ の変換則を決めればよいのである．つまり

$$\nabla'_{\mu}V'_{\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\nabla_{\alpha}V_{\beta}. \tag{1.52}$$

ここで $\nabla'_{\mu}V'_{\nu} = \partial'_{\mu}V'_{\nu} - \Gamma'^{\alpha}_{\nu\mu}V'_{\alpha}$ である．上式から単純計算を行い整理することによって $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ に対する変換則

$$\Gamma'^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\rho}}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\rho}} \tag{1.53}$$

を得る．

変換則を得られたものはいいものの，$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ が時空の曲がり具合とどのように関連しているか不明である．これは平行移動に対する要請がまだ甘いからである．では，どのような要請をさらに課せばよいのか．よくよく振り返ると等価原理についてはまだ吟味されていない．平行移動でベクトルが変化する現象は曲がった空間の特徴である．従って，等価原理は局所的に，つまりある 1 点で $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ をゼロにすることができることと等価であることが期待される．これに関して次の性質が成り立っている．

性質： すべての点に対して $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$ となる座標系が必ず存在することは $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$ が成り立つことと等価である．

証明　二つの座標系 $\{x^{\mu}\}$, $\{x'^{\mu}\}$ を考え，x 系のある点で $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$ となったとする．すると式 (1.53) から

$$\Gamma'^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\rho}} \tag{1.54}$$

が成り立つ．この表式から明らかにクリストッフェル記号の下の添字について対称であることが分かる．

では，逆にある点でクリストッフェル記号の下の添字について対称だった場合はどうであろうか．この点を x 系の原点にとり，具体的な座標変換として

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(0)x^{\alpha}x^{\beta} \tag{1.55}$$

を考えよう．すると同じ点上で

$$\begin{aligned}&(\partial x'^{\mu}/\partial x^{\nu})|_{x=0} = \delta^{\mu}_{\nu}, \quad (\partial x^{\mu}/\partial x'^{\nu})|_{x=0} = \delta^{\mu}_{\nu},\\ &(\partial^2 x^{\rho}/\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu})|_{x=0} = -\frac{1}{2}\Big(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}(0) + \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}(0)\Big)\end{aligned} \tag{1.56}$$

が成り立つ．あとで対称性のご利益を陽にみるために，最後の式で意図的にクリストッフェル記号の対称性は用いていない．これを式 (1.53) に代入すると

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\sigma}_{\mu\nu}(0) &= \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}(0) - \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}(0) + \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}(0)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}(0) - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}(0)\Big)\\ &= 0\end{aligned} \tag{1.57}$$

となることが分かる．以上から上記の性質を示すことができた．証明終わり．

この性質により，スカラー場 ϕ に対して

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)\phi = 0 \tag{1.58}$$

が成り立つ．そこで，この性質を積極的に要請することにする．

要請 1：$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu}$ を課す．

これでクリストッフェル記号の性質に部分的に制限を付けることができたものの時空の曲がり具合とはまだ関係をつけることができていない．そこで，平坦な空間の平行移動の性質

要請 2：平行移動を行う際に，ベクトルの大きさは不変に保たれる．

を曲がった空間にも要請することにしよう．これを式を用いて表現すると

$$g^{\mu\nu}(x+\Delta x)\tilde{V}_\mu(x+\Delta x)\tilde{V}_\nu(x+\Delta x) = g^{\mu\nu}(x)V_\mu(x)V_\nu(x) \tag{1.59}$$

である．この式の Δx の 1 次のオーダーから

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + g^{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\beta\alpha} + g^{\beta\mu}\Gamma^\nu_{\beta\alpha} = 0 \tag{1.60}$$

が導かれる．ここで公式 (1.45) を用いると，上式は

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu,\nu\alpha} + \Gamma_{\nu,\mu\alpha} \tag{1.61}$$

と書き直すことができる．ただし，ここで $\Gamma_{\mu,\nu\alpha} = g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}$ と書いた．ここで添字をサイクリックにまわすと

$$\partial_\mu g_{\nu\alpha} = \Gamma_{\alpha,\nu\mu} + \Gamma_{\nu,\alpha\mu}, \tag{1.62}$$

$$\partial_\nu g_{\alpha\mu} = \Gamma_{\alpha,\mu\nu} + \Gamma_{\mu,\alpha\nu} \tag{1.63}$$

を得る．式 (1.62) と (1.63) を足して式 (1.61) を引くと

$$\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} = 2\Gamma_{\alpha,\mu\nu} \tag{1.64}$$

が得られる．従って，クリストッフェル記号が

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \tag{1.65}$$

のように計量と計量の微分で書けることが分かった．この結論に至る際の仮定は等価原理と平行移動におけるベクトルの大きさの保存だけであったことに注意しよう．

なお，二つの共変ベクトルの内積

$$g^{\mu\nu}(x)A_\mu(x)B_\nu(x) \tag{1.66}$$

も平行移動に対して保存されることに注意する．計算は簡単なので各人で行ってほしい．

これまで共変微分について考察を行ってきたが，内積が保存されるという仮定，即ち

$$\tilde{A}^\mu(x+\Delta x)\tilde{B}_\mu(x+\Delta x) = A^\mu(x)B_\mu(x) \tag{1.67}$$

から反変ベクトルに対する共変微分が導入できる．ここで $\tilde{A}^\mu(x)$ は点 x のベクトル $A_\mu(x)$ を点 $x+\Delta x$ まで平行移動したものである．平行移動の際の微小変化分を $\delta A^\mu(x)$ として

$$\tilde{A}^\mu(x+\Delta x) = A^\mu(x) + \delta A^\mu(x) \tag{1.68}$$

と書いておこう．これを上式に代入すると

$$(A^\mu(x) + \delta A^\mu(x))(B_\mu(x) + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Delta x^\beta B_\alpha(x)) = A^\mu(x)B_\mu(x). \tag{1.69}$$

よって，Δx の 1 次の項から

$$\delta A^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\alpha\nu}(x)A^\alpha(x)\Delta x^\nu \tag{1.70}$$

となる．以上より，$\tilde{A}^\mu(x+\Delta x)$ は

$$\tilde{A}^\mu(x+\Delta x) = A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\alpha\nu}(x)A^\alpha(x) \tag{1.71}$$

のようにクリストッフェル記号で書ける．共変ベクトルと比べてクリストッフェル記号の前の符号が逆になっていることに注意する．最後に共変微分を次のように定義すれば完了である．

$$\begin{aligned}\nabla_\nu A^\mu &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A^\mu(x+\Delta x) - \tilde{A}^\mu(x+\Delta x)}{\Delta x^\nu}\\ &= \partial_\nu A^\mu(x) + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x)A^\alpha(x).\end{aligned} \tag{1.72}$$

一般のテンソル $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}$ の共変微分は同様に

$$\begin{aligned}&\nabla_\alpha T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}\\ &\quad= \partial_\alpha T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m} + \Gamma^{\mu_1}_{\alpha\rho_1}T^{\rho_1\mu_2\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}\\ &\qquad+ \Gamma^{\mu_2}_{\alpha\rho_2}T^{\mu_1\rho_2\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m} + \cdots + \Gamma^{\mu_n}_{\alpha\rho_n}T^{\mu_1\mu_2\cdots\rho_n}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}\\ &\qquad- \Gamma^{\sigma_1}_{\alpha\nu_1}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{}_{\sigma_1\nu_2\cdots\nu_m} - \Gamma^{\sigma_2}_{\alpha\nu_2}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\sigma_2\cdots\nu_m} - \cdots\\ &\qquad- \Gamma^{\sigma_m}_{\alpha\nu_m}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\sigma_m}\end{aligned} \tag{1.73}$$

となる．

この小節の最後に計量 $g_{\mu\nu}$ に共変微分を作用させると

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} = 0 \tag{1.74}$$

が成り立つことが示される．つまり共変微分は計量をすり抜けるのである．この性質はメトリシティと呼ばれている．

1.4.3 曲率テンソル

等価原理によりクリストッフェル記号 $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ が局所的にゼロとなるような座標が存在する．そこで時空の曲がり具合を測る共変的な量の導入が望ましい．それが**リーマンテンソル**と呼ばれるもので，任意の共変ベクトル A_μ に対して

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A_\alpha = R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} A_\beta \tag{1.75}$$

によって定義される．共変微分の定義を用いることで，リーマンテンソルは

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = \partial_\nu \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} - \partial_\mu \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\nu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\rho} \tag{1.76}$$

とクリストッフェル記号を用いて書くことができる*1．クリストッフェル記号の 1 階微分である第 1 項と 2 項は局所慣性系においても消えることはない．式 (1.76) を導出する際に

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\alpha = \partial_\mu \nabla_\nu A_\alpha - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \nabla_\beta A_\alpha - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} \nabla_\nu A_\beta \tag{1.77}$$

とまず書き下し，対称性からできるだけ項数を減らし，そのあとで各項の $\nabla_\nu A_\alpha$ に $\partial_\nu A_\alpha - \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} A_\beta$ を代入するとすこし計算が簡単になる．

同様に反変ベクトル A^μ に対して

$$\begin{aligned}(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A^\alpha &= g^{\alpha\beta}(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A_\beta \\ &= g^{\alpha\beta} R_{\mu\nu\beta}{}^{\rho} A_\rho \end{aligned} \tag{1.78}$$

となる．

この節の最後にリーマンテンソルの次の 5 つの性質を示しておこう．これらは後でしばしば活用することになる．

$$\text{(i)} \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} \tag{1.79}$$

$$\text{(ii)} \quad R_{[\mu\nu\alpha]\beta} = 0 \tag{1.80}$$

$$\text{(iii)} \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} \tag{1.81}$$

$$\text{(iv)} \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{1.82}$$

$$\text{(v)} \quad \nabla_{[\alpha} R_{\beta\mu]\nu\rho} = 0 \tag{1.83}$$

最後の式は**ビアンキ恒等式**と呼ばれている．ここで添字の $[\cdots]$ は完全反対称化を表している．例えば，$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$, $T_{[\mu\nu\alpha]} = \frac{1}{3!}(T_{\mu\nu\alpha} - T_{\mu\alpha\nu} + T_{\nu\alpha\mu} - T_{\nu\mu\alpha} + T_{\alpha\mu\nu} - T_{\alpha\nu\mu})$.

まず性質 (i) は定義より明らかである．性質 (ii), (iii), (iv) は局所慣性系で示すのが簡単である．局所慣性系において $\partial_\alpha g_{\mu\nu} \doteq 0$ である．ここで $\doteq$ は局所慣性系の場合にのみ成り立つ等式として便宜上導入した．するとリーマンテンソルは

---

*1 そもそもこのように書けなかったら，式 (1.75) の右辺のようには書いてはいけない．結果を知ってのことである．

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} \hat{=} \frac{1}{2}(\partial_\alpha\partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\alpha\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\beta\partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\beta\partial_\nu g_{\mu\alpha}) \tag{1.84}$$

と書ける．よって，(iii) が成り立つことが目視で分かる．また

$$\begin{aligned} R_{[\mu\nu\alpha]\beta} &\hat{=} \frac{1}{2}(\partial_{[\alpha}\partial_\nu g_{\mu]\beta} - \partial_{[\alpha}\partial_\mu g_{\nu]\beta} + \partial_\beta\partial_{[\mu} g_{\nu\alpha]} - \partial_\beta\partial_{[\nu} g_{\mu\alpha]}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.85}$$

によって (ii) が成り立つ．(iv) は目視で分かる．最後に性質 (v) を示そう．まず，共変ベクトル ω_β に共変微分をとった $\nabla_\alpha\omega_\beta$ に対してリーマンテンソルの定義をあてはめ，微分作用 $\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu$ を作用させると

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)\nabla_\alpha\omega_\beta = R_{\mu\nu\alpha}{}^\rho\nabla_\rho\omega_\beta + R_{\mu\nu\beta}{}^\rho\nabla_\alpha\omega_\rho \tag{1.86}$$

が成り立つ．一方で

$$(\nabla_\nu\nabla_\alpha - \nabla_\alpha\nabla_\nu)\omega_\beta = R_{\nu\alpha\beta}{}^\rho\omega_\rho \tag{1.87}$$

の両辺に ∇_μ を作用させることによって

$$\nabla_\mu(\nabla_\nu\nabla_\alpha - \nabla_\alpha\nabla_\nu)\omega_\beta = \nabla_\mu\left(R_{\nu\alpha\beta}{}^\rho\omega_\rho\right) \tag{1.88}$$

を得る．そして式 (1.86) と式 (1.88) に対して，3 つの添字 μ, ν, α について反対称化すると，左辺が等しくなるため，μ, ν, α について反対称化した右辺同士も等しくなり

$$R_{[\mu\nu\alpha]}{}^\rho\nabla_\rho\omega_\beta + R_{[\mu\nu|\beta|}{}^\rho\nabla_{\alpha]}\omega_\rho = \nabla_{[\mu}R_{\nu\alpha]\beta}{}^\rho\omega_\rho + R_{[\nu\alpha|\beta|}{}^\rho\nabla_{\mu]}\omega_\rho \tag{1.89}$$

が成り立つ．ここで添字の反対称化 $[\cdots]$ の中に “ | ” で挟んでいる添字があるが，それを除いて反対称化をとるよう約束する．右辺，左辺の第 2 項は同じ項であるため相殺する．また左辺の第 1 項は性質 (ii) からゼロとなる．以上より右辺第 1 項だけが残り，性質 (v) が導かれる．

性質 (v) において $g^{\alpha\nu}$ と $g^{\beta\rho}$ を作用させて縮約をとると

$$\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = 0 \tag{1.90}$$

となる．ここで，$R_{\mu\nu}, R$ リッチテンソル，リッチスカラーで，次のように定義される．

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\mu\alpha\nu\beta},$$
$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}.$$

式 (1.90) は**縮約されたビアンキ恒等式**と呼ばれている．

1.4.4 測地線

平行移動に関連して測地線と呼ばれる粒子の軌道の概念が自然に導入される．測地線とは曲がった時空で「まっすぐ」に伸びた軌道のことである．

曲線の接ベクトルを T^μ と書くと

$$T^\mu \nabla_\mu T^\nu = 0 \tag{1.91}$$

に従う曲線を**測地線**と呼ぶ．接ベクトルをその方向に平行移動しても変化を伴わないことを上式は意味している．これが曲がった時空で「まっすぐ」を表現していると思ってほしい．粒子にとってはまっすぐ進んでいるつもりでも，時空が曲がっているため結果として「まっすぐ」に進むことができない．

軌道のパラメータ τ を導入し $(x^\mu = x^\mu(\tau))$，接ベクトルが

$$T^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \tag{1.92}$$

と書けているとする．すると式 (1.91) は

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x(\tau))\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{1.93}$$

と書き直すことができる．従って，初期条件 $x^\mu(0)$ と $dx^\mu/d\tau(0)$ が与えられれば運動は決まる．このときのパラメータ τ を**アフィンパラメータ**と呼ぶ．軌道を特徴付けるパラメータには自由度がある．$\tau = \tau(\lambda)$ として新しいパラメータで書き直すと，式 (1.93) は

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x(\lambda))\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = -\frac{d^2\lambda/d\tau^2}{(d\lambda/d\tau)^2}\frac{dx^\mu}{d\lambda} \tag{1.94}$$

となる．よって，$\tilde{T}^\mu = dx^\mu/d\lambda$ と書くと

$$\tilde{T}^\mu \nabla_\mu \tilde{T}^\nu = \alpha(x(\lambda))\tilde{T}^\nu \tag{1.95}$$

となる．パラメータを取り替えただけであるから，これも測地線の方程式である．α は軌道上の関数．$\tilde{T}^\mu$ を軌道に沿って平行移動したときに，接線方向のみに接ベクトルの大きさが変化している．従って，同じ軌道であってもパラメータの取り方によって接ベクトルの大きさが変化があってもよい．

この質量をもった質点に対する方程式は作用原理からも導かれる．特殊相対性理論に倣って

$$S = \int L d\tau = -mc^2 \int d\tau \tag{1.96}$$

と書く．ここで $d\tau$ は固有時間である，即ち

$$(cd\tau)^2 = -g_{\mu\nu}(x(\tau))dx^\mu(\tau)dx^\nu(\tau) \tag{1.97}$$

である．これを用いると作用は

$$S = -mc\int\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}d\tau \tag{1.98}$$

となる．これを変分することによって，運動方程式

$$g_{\mu\alpha}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \left(\partial_\nu g_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{1.99}$$

を得る．これは一見式 (1.93) と異なるが，クリストッフェル記号を用いれば同じであることが直ちにわかる．

1.4.5 リー微分

曲線に沿った自然な微分も定義される．曲線の接ベクトルを X^μ とし，パラメータ t を用いて，$X^\mu = dx^\mu(t)/dt$ と書けている場合を考えよう．このとき自然に座標変換

$$x'^\mu = x^\mu - tX^\mu \tag{1.100}$$

を考えることができる．まずもとの座標系でみて $x^\mu = a^\mu$ の点 P でのベクトル $V^\mu(a)$ を考える．これに対応して，点 P とは異なるが，座標系 x'^μ で同じ座標値の点 $P'(x'^\mu = a^\mu)$ での座標変換

$$V'^\mu(x' = a) = (\partial x'^\mu/\partial x^\nu)|_{x'=a} V^\nu(a + tX) \tag{1.101}$$

を考える．このベクトルの成分を元の座標系 x^μ で見た点 P でのベクトル $\tilde{V}$ の成分 $\tilde{V}^\mu(x = a)$ と同一視する，即ち

$$\tilde{V}^\mu(x = a) = V'^\mu(x' = a). \tag{1.102}$$

ここまで準備するとリー微分が定義される．

$$(\pounds_X V^\mu)_P := \lim_{t\to 0} \frac{\tilde{V}^\mu(x = a) - V^\mu(x = a)}{t}. \tag{1.103}$$

この定義に式 (1.101) を代入し，具体的に計算を進めると

$$\begin{aligned}
(\pounds_X V^\mu)_P &= \lim_{t\to 0} \frac{(\partial x'^\mu/\partial x^\nu)|_{x'=a} V^\nu(a + tX) - V^\mu(x = a)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(\delta^\mu_\nu - t\partial_\nu X^\mu) V^\nu(a + tX) - V^\mu(a)}{t} \\
&= X^\nu(a)\partial_\nu V^\mu(a) - V^\nu(a)\partial_\nu X^\mu(a) \\
&= [X, V]^\mu_P \\
&= \Big(X^\nu \nabla_\nu V^\mu - V^\nu \nabla_\nu X^\mu \Big)_P
\end{aligned} \tag{1.104}$$

となる．ここで $[X, V]$ はベクトルの交換子である．最後の結果を見て分かるように，このリー微分は共変的である．同じ点でテンソルの差をとっているわけであるから当然の結論である．

リー微分の導入に際して幾分手の込んだ作業を行ったが，次のような変換群を用いて考えると一部の読者にとっては分かりやすいであろう．まず，X^μ によって生成される 1 径数変換群 Φ_t を考える．この群は写像と見なせて，X^μ が作る曲線に沿った点の移動に対応している．例えば点 P を Φ_t によって，点 $\Phi_t(P)$ まで移動させることができる．この点でのベクトルは $V_{\Phi_t(P)}$ である．これを点 P まで引き戻したベクトル $(\Phi_t^* V)_P$ を考えることできる．すると，リー微分は

$$(\pounds_X V)_P = \lim_{t \to 0} \frac{(\Phi_t^* V)_P - V_P}{t} \tag{1.105}$$

と定義することができる．

同様に

$$\pounds_X V_\mu = X^\nu \nabla_\nu V_\mu + V_\nu \nabla_\mu X^\nu \tag{1.106}$$

となることを示すことができる．計量に対しては同様に

$$\begin{aligned} \pounds_X g_{\mu\nu} &= X^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu X^\alpha + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu X^\alpha \\ &= \nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu \end{aligned} \tag{1.107}$$

となる．

1.4.6 キリングベクトル

あるベクトル場 ξ^μ が存在し

$$\pounds_\xi g_{\mu\nu} = 0 \tag{1.108}$$

を満たすものを**キリングベクトル場**という．これは ξ^μ によって生成される軌道に沿って，計量が変化しないことを表している．上の式は

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \tag{1.109}$$

とも書くことができる．これを**キリング方程式**と呼ぶ．

通常，この方程式を直接解くことはしない．与えられた計量の形をみて予想を付けてから，実際にこの方程式を満足していることを確認することが多い．

1.4.7 体積要素・面積要素

体積積分，面積分について考えよう．まず親しみのある局所的に平坦な座標系 $\{y^\mu\}$ から出発しよう．そこでの体積要素は

$$d^4 y \tag{1.110}$$

である．座標変換で任意の座標系 $\{x^\mu\}$ に移ろう．

$$d^4 y = |\det(\partial y/\partial x)| d^4 x. \tag{1.111}$$

一方で，計量の座標変換から一般に行列式 $g = \det(g_{\mu\nu})$ に対して

$$g' = \Big(\det(\partial x/\partial x')\Big)^2 g \tag{1.112}$$

が成り立ち

$$|\det(\partial x/\partial x')| = \sqrt{g'/g} \tag{1.113}$$

となる．今の場合，$x^\mu \to y^\mu$, $x'^\mu \to x^\mu$ と置き換えて

$$|\det(\partial y/\partial x)| = \sqrt{-g} \tag{1.114}$$

であるので，式 (1.111) は

$$d^4y = \sqrt{-g}d^4x \tag{1.115}$$

と書ける．このことから，一般座標系での微小体積要素は

$$\sqrt{-g}d^4x \tag{1.116}$$

となる．これは

$$\epsilon_{0123}dx^0dx^1dx^2dx^3 \tag{1.117}$$

と書くこともできる．

次に面積分を考えよう．簡単のため，上手に座標を選び x^0 = 一定面 Σ_0 上の積分を想定し，その微小面積要素を考えよう．このとき Σ_0 上の計量は

$$g_{ij}dx^idx^j \tag{1.118}$$

で与えられる．ここで $\{x^i\}$ は空間座標である．不要な混同を避けるため，行列式の表記の都合上 $g_{ij} = \gamma_{ij}$ と書くことにしよう．すると，微小面積要素は上の議論から

$$d\Sigma = \sqrt{\gamma}d^3x \tag{1.119}$$

となる．ここで，γ は γ_{ij} の行列式である．これを 4 次元的に共変的に書くことを考えてみよう．まず逆行列の定義から g^{00} は $g^{00} = \gamma/g$ と書けることを用いると

$$d\Sigma = \sqrt{-g^{00}}\sqrt{-g}d^3x \tag{1.120}$$

となる．次に g^{00} を単位法線ベクトルの成分で書くことを考えよう．そこで n_μ を Σ_0 の法線ベクトル[*2]とすると $g^{\mu\nu}n_\mu n_\nu = n^\mu n_\nu = -1$ から $g^{00}(n_0)^2 = n^0n_0 = -1$ が成り立つことを考慮すると，$\sqrt{-g^{00}} = -1/n_0 = n^0$ となることが分かる．ここで n^μ は未来向きであると仮定，即ち $n^0 > 0$ $(n_0 < 0)$ とした．従って

$$d\Sigma = n^0\sqrt{-g}d^3x = n^0\sqrt{-g}\eta_{0123}d^3x = n^\mu\epsilon_{\mu123}dx^1dx^2dx^3 \tag{1.121}$$

と書ける．一度共変的に書いてしまえば，それは座標に依存しないので Σ_0 を x^0 = 一定面に限定する必要はない．時間的超曲面を考えたい場合は，n^μ をその面に垂直な空間的単位法線をとればよく

$$d\Sigma = n^\mu\epsilon_{\mu012}dx^0dx^1dx^2 \tag{1.122}$$

と書ける．ここで $n^\mu n_\mu = 1$ である．n^μ は x^3 = 一定面に垂直であるとした．

しばしば n^μ を抜き出して

$$d\Sigma = n^\mu d\Sigma_\mu \tag{1.123}$$

---

*2 $n_i = 0$ である．

と書くことがある．ここで

$$d\Sigma_\mu = \epsilon_{\mu 123} dx^1 dx^2 dx^3 \tag{1.124}$$

同様の考察から単位ベクトル n^μ と m^μ に垂直な 2 次元面の微小面積要素は

$$dS = n^\mu m^\nu \epsilon_{\mu\nu 23} dx^2 dx^3 \tag{1.125}$$

となることが分かる．ここで n^μ と m^μ はそれぞれ $x^0 =$ 一定と $x' =$ 一定面に垂直であるとした．

証明は省略するが，これらを用いてベクトル V^μ に対して，ガウスの定理は次のように表現される．

$$\int_V \nabla_\mu V^\mu dV = \int_\Sigma V^\mu d\Sigma_\mu. \tag{1.126}$$

体積 V 上の積分が，その境界面 Σ 上の積分に書き直される．

これらの体積要素・面積要素は後に導入する微分形式を用いることにより美しく表現される．

1.4.8 共形変換とワイルテンソル

リーマンテンソルを計量で縮約をとってゼロになる成分とそうでないものとに一意的に分解できる．後の応用のために任意次元 D（ただし，$D \geq 4$）で考えることとしよう．リーマンテンソルの添字の対称性から

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = C_{\mu\nu\alpha\beta} + \alpha(g_{\mu[\alpha}R_{\beta]\nu} - g_{\nu[\alpha}R_{\beta]\mu}) + \beta g_{\mu[\alpha}g_{\beta]\nu}R \tag{1.127}$$

と書ける．$C_{\mu\nu\alpha\beta}$ は任意の添字の縮約でゼロとなるリーマンテンソルと同じ対称性を持つテンソルである．これが**ワイルテンソル**である．係数 α, β は上式で縮約をとることで決まる定数である．具体的に $g^{\nu\beta}$ で縮約をとると

$$R_{\mu\alpha} = R_{\mu\nu\alpha\beta}g^{\nu\beta} = \frac{\alpha + (D-1)\beta}{2}Rg_{\mu\alpha} + \frac{(D-2)\alpha}{2}R_{\mu\alpha} \tag{1.128}$$

となり，両辺の係数を比較することで

$$\alpha = \frac{2}{D-2}, \quad \beta = -\frac{2}{(D-2)(D-1)} \tag{1.129}$$

と決まる．結局

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} = C_{\mu\nu\alpha\beta} &+ \frac{2}{D-2}(g_{\mu[\alpha}R_{\beta]\nu} - g_{\nu[\alpha}R_{\beta]\mu}) \\ &- \frac{2}{(D-2)(D-1)}g_{\mu[\alpha}g_{\beta]\nu}R. \end{aligned} \tag{1.130}$$

後に分かることであるが，リッチテンソルとリッチスカラーで書けている部分はアイシュタイン方程式を用いて物質の情報（エネルギー・運動量テンソル）だけで書くことができる．つまりリーマンテンソルの中に含まれている情報のうち，リッチテンソルとスカラーで書けている部分は物質からきている．従って，純粋に重力の情報はその残りであるところのワイルテンソルに含まれていると

推定される．そして，重力に特徴的な長さのスケールが存在しないことを反映して，ワイルテンソル $C^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ は次に定義する共形変換の下で不変であることが分かる．

共形変換は次のように定義される．

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}. \tag{1.131}$$

ここで Ω は正のあるスカラー関数である．この変換でクリストッフェル記号は

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}(\partial_\alpha \tilde{g}_{\nu\beta} + \partial_\beta \tilde{g}_{\nu\alpha} - \partial_\nu \tilde{g}_{\alpha\beta}) \\ &= \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \Omega^{-1}(\delta^{\mu}_{\alpha}\nabla_\beta \Omega + \delta^{\mu}_{\beta}\nabla_\alpha \Omega - g_{\alpha\beta}\nabla^{\mu}\Omega) \\ &=: \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{1.132}$$

と変換する．これを用いると，リーマンテンソルは

$$\begin{aligned}\tilde{R}^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} &= \partial_\alpha \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\beta} - \partial_\beta \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\alpha} + \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\rho\alpha}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\nu\beta} - \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\rho\beta}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\nu\alpha} \\ &= R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha \delta\Gamma^{\mu}_{\nu\beta} - \nabla_\beta \delta\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} + \delta\Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\beta} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\rho\beta}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\alpha} \\ &= R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} - 2\delta^{\mu}_{[\alpha}\nabla_{\beta]}\nabla_\nu \ln\Omega + 2g_{\nu[\alpha}\nabla_{\beta]}\nabla^{\mu}\ln\Omega \\ &\quad + 2\delta^{\mu}_{[\alpha}\nabla_{\beta]}\ln\Omega\nabla_\nu \ln\Omega - 2g_{\nu[\alpha}\nabla_{\beta]}\ln\Omega\nabla^{\mu}\ln\Omega \\ &\quad - 2\delta^{\mu}_{[\alpha}g_{\beta]\nu}(\nabla\ln\Omega)^2\end{aligned} \tag{1.133}$$

と変換することが分かる．ここで $(\nabla \ln\Omega)^2 = g^{\mu\nu}\nabla_\mu \ln\Omega\nabla_\nu \ln\Omega$ と書いた．さらに縮約をとるとリッチテンソルが

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\nu\beta} &= R_{\nu\beta} - (D-2)\nabla_\nu\nabla_\beta \ln\Omega - g_{\nu\beta}\nabla^2\ln\Omega \\ &\quad + (D-2)\nabla_\nu \ln\Omega\nabla_\beta \ln\Omega - (D-2)g_{\nu\beta}(\nabla\ln\Omega)^2,\end{aligned} \tag{1.134}$$

そしてリッチスカラーが

$$\Omega^2\tilde{R} = R - 2(D-1)\nabla^2\ln\Omega - (D-2)(D-1)(\nabla\ln\Omega)^2 \tag{1.135}$$

と変換することが分かる．ここで $\nabla^2\ln\Omega = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu \ln\Omega$．これらを用いるとワイルテンソルが実際に共形変換の下で不変であること，即ち

$$\tilde{C}^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = C^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} \tag{1.136}$$

となることが確かめられる．

最後に $D=2$, 3 の特殊な場合について考えよう．ここでは擬正規直交基底をとりその座標の添字にハットを付けることにしよう[*3]．まず $D=2$ の場合，リーマンテンソルの独立な成分は $R_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}}$ の一つだけであるが，リッチテンソルは

$$R_{\hat{0}\hat{0}} = R_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}} = -R_{\hat{1}\hat{1}}, \quad R_{\hat{0}\hat{1}} = 0, \tag{1.137}$$

スカラーテンソルは

[*3] この基底の下で計量の成分は $g_{\hat{0}\hat{0}} = -1$, $g_{\hat{i}\hat{j}} = \delta_{ij}$, $g_{\hat{0}\hat{i}} = 0$ となる．

$$R = -2R_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}} \tag{1.138}$$

となるため，リーマンテンソルはリッチスカラーだけで書き下すことができる．従って，ワイルテンソルの部分は存在しない．これは重力の自由度が存在しないことを意味している．特に，上の関係式から明らかなように2次元の場合

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \tag{1.139}$$

が成り立つことに注意する*4．

次に $D = 3$ の場合を考えよう．このとき独立なリーマンテンソルは

$$R_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}},\ R_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{2}},\ R_{\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{2}},\ R_{\hat{0}\hat{2}\hat{0}\hat{2}},\ R_{\hat{0}\hat{2}\hat{1}\hat{2}},\ R_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{2}} \tag{1.140}$$

の6つである．一方で，リッチテンソルは

$$R_{\hat{0}\hat{0}},\ R_{\hat{0}\hat{1}},\ R_{\hat{0}\hat{2}},\ R_{\hat{1}\hat{1}},\ R_{\hat{1}\hat{2}},\ R_{\hat{2}\hat{2}} \tag{1.141}$$

の6つである．数が同じなのでリーマンテンソルがリッチテンソルで書ける．

$$R_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}} = \frac{1}{2}(R_{\hat{0}\hat{0}} - R_{\hat{1}\hat{1}} + R_{\hat{2}\hat{2}}) \tag{1.142}$$

$$R_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{2}} = -R_{\hat{1}\hat{2}} \tag{1.143}$$

$$R_{\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{2}} = -R_{\hat{0}\hat{2}} \tag{1.144}$$

$$R_{\hat{0}\hat{2}\hat{0}\hat{2}} = \frac{1}{2}(R_{\hat{0}\hat{0}} + R_{\hat{1}\hat{1}} - R_{\hat{2}\hat{2}}) \tag{1.145}$$

$$R_{\hat{0}\hat{2}\hat{1}\hat{2}} = R_{\hat{0}\hat{1}} \tag{1.146}$$

$$R_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{2}} = \frac{1}{2}(R_{\hat{0}\hat{0}} + R_{\hat{1}\hat{1}} + R_{\hat{2}\hat{2}}). \tag{1.147}$$

よってワイルテンソルはゼロである．これも重力の自由度が存在しないことに対応している．3次元の場合，一般には

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \neq 0 \tag{1.148}$$

である*5．

1.5 微分幾何学入門

本節では微分幾何の簡単な導入を行う．定義などで幾分不完全な箇所もあるが，本書で必要な部分に留めた．詳しくは専門書を参考してほしい．

1.5.1 ベクトルと微分形式

ベクトル場自体は座標に依存しない概念であると述べた．これまでベクトル

---

*4 後に分かることであるが，この左辺の組み合わせはちょうどアインシュタイン方程式の左辺に対応している．それが常にゼロであるから，アインシュタイン方程式は存在しないことになる．

*5 3次元の場合，アインシュタイン方程式は存在する．しかし，ワイルテンソルがゼロであることに呼応し局所的な自由度がない．

の成分の変換則から共変，あるいは反変ベクトルを導入してきた．具体的な計算の際には，具体的な観測者にマッチした座標系を導入することが最終的には求められることが多いが，成分表示をしない表現による計算もときには有効である[*6]．そこで，ここでは簡単にベクトルの概念を整理しておこう．

反変ベクトルの座標基底を e_μ と書いておくと，ベクトルは

$$V = V^\mu e_\mu \tag{1.149}$$

として導入される．ここで座標変換の際に座標基底 e_μ は，V^μ の変換則と打ち消しあうように変換する必要がある．そのためには

$$e'_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} e_\nu \tag{1.150}$$

を満足していればよい．この変換則を満たすものとして微分 ∂_μ があるが，それを座標基底とみなすことができる．実際にこの微分はベクトルの性質を満たしている．そこで今後は便宜上座標基底をこの座標微分で表現することにする．つまり

$$V = V^\mu \partial_\mu. \tag{1.151}$$

ここで基底 e_μ を形式的に ∂_μ と書いたと思ってもよいが，微分演算だと思ってもよい．すると実はベクトルとは実関数から実数への写像であるとみなすことができる．例えば，関数 $f(x)$ に V を作用させると

$$V(f(x)) = V^\mu \partial_\mu f(x) \in \mathbf{R} \tag{1.152}$$

となっている．このように微分幾何学でベクトル場は実関数から実数への写像として定義される．

同様に共変ベクトル ω_μ に対して座標に依存しないベクトルを座標基底を θ^μ を用いて

$$\omega = \omega_\mu \theta^\mu \tag{1.153}$$

と書くことにしよう．ω 自体が座標に依存しないためには，θ^μ の振る舞いが

$$\theta'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \theta^\nu \tag{1.154}$$

と決定される．これを満たす自然なものとして dx^μ があるが，便宜上座標基底を dx^μ と書くことにする．

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \tag{1.155}$$

[*6] これは正確ではない．出自が数学を専門とする方は座標成分表示を用いることなく計算を進める傾向がある．一方で，出自が物理の方は座標表示を用いることが多い傾向がある．筆者は数学の表現の美しさに魅了され，学生の時分は極力座標表示を避けていたが，研究の最前線で大量の計算を行うちに，座標表示を採用することが多くなった．しかし，その数学的構造などを把握するには座標表示を用いない方がいいように思う．

共変ベクトルと反変ベクトルの間に内積が定義されていたことを思い出そう．具体的には

$$V^\mu \omega_\mu. \tag{1.156}$$

この内積を座標に依存しない表現で書き直すと

$$\omega(V) = \omega_\mu V^\nu dx^\mu(\partial_\nu) \tag{1.157}$$

となる．ここで

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu \tag{1.158}$$

と約束しておけば内積 $V^\mu \omega_\mu$ が再現される．この内積から，共変ベクトルから作ったベクトル（例えば，$\omega = \omega_\mu dx^\mu$）は，反変ベクトルから作ったベクトル（例えば，$V = V^\mu \partial_\mu$）を実数に移す写像であると理解できる．このベクトル ω を**微分形式**と呼ぶ．微分幾何学では微分形式をベクトルを実数に移す写像として導入される．

ここでテンソル積 $\otimes$ を導入しておこう．

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_p} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_q}. \tag{1.159}$$

テンソル積は多重線形空間を構成する．

1.5.2 座標変換とリー微分

座標変換の下でベクトルは不変である．

$$V'^\mu(x')\partial'_\mu = V^\mu(x)\partial_\mu. \tag{1.160}$$

ここで微小座標変換 $x'^\mu = x^\mu - tX^\mu$ を考え，左辺を t の 1 次まで展開してみよう．

$$\begin{aligned} V'^\mu(x')\partial'_\mu &= V'^\nu(x - tX)\partial'_\nu x^\mu \partial_\mu \\ &= (V'^\nu(x) - tX^\alpha \partial_\alpha V^\nu(x))(\delta^\mu_\nu + t\partial_\nu X^\mu)\partial_\mu \\ &= \Big(V'^\mu(x) - t(X^\alpha \partial_\alpha V^\mu - V^\alpha \partial_\alpha X^\mu)\Big)\partial_\mu \\ &= \Big(V'^\mu(x) - t\pounds_X V^\mu\Big)\partial_\mu. \end{aligned} \tag{1.161}$$

よって，式 (1.160) から

$$\lim_{t\to 0} \frac{V'^\mu(x) - V^\mu(x)}{t} = \pounds_X V^\mu \tag{1.162}$$

が成り立つ．このように微小座標変換がリー微分を用いて表現されていることが再確認された．

1.5.3 ウェッジ積，外微分

本書では直接用いないが，ウェッジ積「$\wedge$」を以下のように導入しよう．

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu. \tag{1.163}$$

これを 2 形式と呼ぶことにする．定義から明らかに，μ と ν が同じ添字の場合ゼロとなる．例えば

$$dx^1 \wedge dx^1 = 0. \tag{1.164}$$

更に，3 形式を

$$\begin{aligned} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho &= -dx^\nu \wedge dx^\mu \wedge dx^\rho \\ &= -dx^\mu \wedge dx^\rho \wedge dx^\nu \end{aligned} \tag{1.165}$$

で導入しよう．同様に 4 以上の高い形式を構成できる．ただし，時空の次元が D の場合，$0, 1, \cdots, D$ 形式で尽きる．なぜなら $D+1$ 形式を構成しようとしても，同じ添字が現れてしまうためゼロとなってしまうからである．一般には線形結合で表現されて

$$\omega_{(2)} = \frac{1}{2!}\omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{1.166}$$

$$\omega_{(3)} = \frac{1}{3!}\omega_{\mu\nu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho, \tag{1.167}$$

$$\cdots \tag{1.168}$$

$$\omega_{(D)} = \frac{1}{D!}\omega_{\mu_1 \cdots \mu_D} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^D. \tag{1.169}$$

ここで $\omega_{\mu_1 \cdots}$ の添字は完全反対称である．テンソルで形式を表現することができる．例えば

$$\begin{aligned} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho &= dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\rho - dx^\nu \otimes dx^\mu \otimes dx^\rho \\ &\quad + dx^\nu \otimes dx^\rho \otimes dx^\mu - dx^\nu \otimes dx^\mu \otimes dx^\rho \\ &\quad + dx^\rho \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\rho \otimes dx^\nu \otimes dx^\mu \end{aligned} \tag{1.170}$$

である．

微分形式に対して外微分「d」を定義しよう．この微分は p 形式を $p+1$ 形式に移す写像として以下のように導入される．まず 0 形式であるスカラー関数 $\omega_{(0)}$ に対して

$$d\omega_{(0)} = \partial_\mu \omega_{(0)} dx^\mu \tag{1.171}$$

と全微分として自然に導入する．p 形式 $\omega_{(p)} = (1/p!)\omega_{\mu_1 \cdots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$ に対しては

$$\begin{aligned} d\omega_{(p)} &= \frac{1}{p!} d\omega_{\mu_1 \cdots \mu_p} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \partial_\rho \omega_{\mu_1 \cdots \mu_p} dx^\rho \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \end{aligned} \tag{1.172}$$

と定義される．この外微分は 2 回作用させるとゼロになる．

$$d^2 \omega_{(p)} = 0. \tag{1.173}$$

1.5.4 体積要素，ホッジ双対

微分形式の特殊な例として

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{1}{D!}\sqrt{-g}\eta_{\mu_1\cdots\mu_D}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_D} \\
&= \frac{1}{D!}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_D}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_D} \\
&= \sqrt{-g}dx^0\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^D
\end{aligned}
\tag{1.174}
$$

がある．最後の行をみると分かるが，これは時空の微小体積要素とみなすことができ，体積積分を

$$
\int\epsilon = \int\sqrt{-g}dx^0\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^D \tag{1.175}
$$

と書くことができる．

時空全体の次元が D の場合，p 形式 $\omega_{(p)}$ を $D-p$ 形式に射影するホッジ双対は次のように定義される．

$$
\begin{aligned}
*\omega_{(p)} &= \frac{1}{p!(D-p)!}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_p\mu_{p+1}\cdots\mu_D}\omega^{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_{p+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_D} \\
&= \frac{1}{(D-p)!}(*\omega_{(p)})_{\mu_{p+1}\cdots\mu_D}dx^{\mu_{p+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_D}.
\end{aligned}
\tag{1.176}
$$

ここで $\omega^{\mu_1\cdots\mu_p} = g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_p\nu_p}\omega_{\nu_1\cdots\nu_p}$．ホッジ双対を 2 回作用させるともとに戻る．

$$
**\omega_{(p)} = \omega_{(p)}. \tag{1.177}
$$

このホッジ双対を用いると $n_\mu dx^\mu$（1 形式）に垂直な面の微小面積要素は

$$
*n \tag{1.178}
$$

で表される．例えばスカラー関数 f のその面上の積分は

$$
\int_\Sigma *nf \tag{1.179}
$$

と書くことができる．$*n$ は

$$
\begin{aligned}
*n &= \frac{1}{(D-1)!1!}\epsilon_{\mu\nu_1\cdots\nu_{D-1}}n^\mu dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_{D-1}} \\
&= \frac{1}{(D-1)!}(*n)_{\nu_1\cdots\nu_{D-1}}dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_{D-1}}
\end{aligned}
\tag{1.180}
$$

である．ここで $n^\mu = g^{\mu\nu}n_\nu$ である．これが先の $d\Sigma$ に一致している．

微分形式を用いるとガウスの定理やストークスの定理は一つにまとめて表現できる．

$$
\int_{\partial M_n}\omega_{(n-1)} = \int_{M_n}d\omega_{(n-1)}. \tag{1.181}
$$

$\omega_{(n)}$ は n 形式，M_n はある n 次元多様体，∂M_n はその境界である．

1.5.5 接続形式，曲率形式

微分形式を使って曲率を表すことができる．そのために次の擬正規直交基底 $\{e^{\hat{\mu}}\}$ を導入しよう．これを用いると計量は

$$ds^2 = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} e^{\hat{\mu}} \otimes e^{\hat{\nu}}. \tag{1.182}$$

ここで $\{e^{\hat{\mu}}\}$ を座標基底で展開すると，

$$e^{\hat{\mu}} = e^{\hat{\mu}}_{\alpha} dx^{\alpha} \tag{1.183}$$

となる．$g_{\mu\nu}, \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ で添字を上げ下げしたものも以後多用する．

ここで 1 接続形式 $\omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ を次のように定義しよう．

$$\omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}} := e^{\rho}_{\hat{\mu}} \nabla_{\sigma} e_{\hat{\nu}\rho} dx^{\sigma} = \omega_{\sigma\hat{\mu}\hat{\nu}} dx^{\sigma}. \tag{1.184}$$

$\omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ の成分を $\omega_{\sigma\hat{\mu}\hat{\nu}}$ と書いた．定義から

$$\omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -e_{\hat{\nu}\rho} \nabla_{\sigma} e^{\rho}_{\hat{\mu}} dx^{\sigma} = -\omega_{\sigma\hat{\nu}\hat{\mu}} dx^{\sigma} \tag{1.185}$$

とも書けるので，$\omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\omega_{\hat{\nu}\hat{\mu}}$ が成り立つことが直ちに分かる．ここで $\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$ を用いたことに注意する．また定義から

$$\omega_{\mu\hat{\alpha}\hat{\beta}} = e^{\rho}_{\hat{\alpha}} \nabla_{\mu} e_{\hat{\beta}\rho} \tag{1.186}$$

また

$$\nabla_{\alpha} e_{\hat{\nu}\beta} = \omega_{\alpha\hat{\mu}\hat{\nu}} e^{\hat{\mu}}_{\beta}. \tag{1.187}$$

が成り立つ．添字 α, β について反対称化すると，左辺の共変微分は偏微分になって

$$\partial_{[\alpha} e^{\hat{\nu}}_{\beta]} = \omega_{[\alpha}{}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} e_{\beta]\hat{\mu}} \tag{1.188}$$

のように書ける．これは外微分とウェッジ積を用いて

$$de^{\hat{\mu}} = -\omega^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} \wedge e^{\hat{\nu}} \tag{1.189}$$

と書くことができる．

また，曲率 2 形式は

$$\Omega^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} := d\omega^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} + \omega^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\rho}} \wedge \omega^{\hat{\rho}}{}_{\hat{\nu}} = \frac{1}{2} R^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} e^{\hat{\rho}} \wedge e^{\hat{\sigma}} \tag{1.190}$$

と定義され，その成分 $R^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$ は先に導入したリーマンテンソルそのものである．即ち

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = e^{\mu}_{\hat{\alpha}} e^{\hat{\beta}}_{\nu} e^{\hat{\gamma}}_{\rho} e^{\hat{\delta}}_{\sigma} R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}. \tag{1.191}$$

1.5.6 スピノールの微分

さて，1 接続形式の定義に戻ってみよう．式 (1.187) をクリストッフェル記号

を用いて書き直すと

$$\partial_\alpha e^{\hat{\nu}}_\beta - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} e^{\hat{\nu}}_\rho + \omega_\alpha{}^{\hat{\nu}\hat{\mu}} e_{\beta\hat{\mu}} = 0 \tag{1.192}$$

となる．この式の左辺の演算をまとめて $\mathcal{D}_\alpha e^{\hat{\nu}}_\beta = 0$ と書いて，この式の意味を考えてみよう．この演算子 $\mathcal{D}_\alpha$ は，$e^{\hat{\nu}}_\beta$ の一般座標の添字 β に対しては $\Gamma^\rho_{\alpha\beta}$ を，局所慣性系の座標の添字 $\hat{\nu}$ に対して，$\omega_\alpha{}^{\hat{\nu}\hat{\mu}}$ を付与したものとみることができる．つまり，この微分は平行移動と局所慣性系におけるローレンツ変換の下でどのように変化するかを規定している．すると局所慣性系で定義されたスピノール ψ に対しても微分が次のように自然に定義される．

$$\nabla_\mu \psi = \left(\partial_\mu - \frac{1}{8}\omega_\mu{}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}[\gamma_{\hat{\beta}}, \gamma_{\hat{\alpha}}]\right)\psi. \tag{1.193}$$

ここで $\gamma_{\hat{\alpha}}$ はディラック行列で $\gamma_{\hat{\alpha}}\gamma_{\hat{\beta}} + \gamma_{\hat{\beta}}\gamma_{\hat{\alpha}} = 2\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ を満たしている．また簡単な計算から

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi = \frac{1}{8} R_{\mu\nu\hat{\alpha}\hat{\beta}}[\gamma^{\hat{\alpha}}, \gamma^{\hat{\beta}}]\psi \tag{1.194}$$

が成り立つことが示される．

スピノールは 7.5.2 節の正エネルギー定理の証明で用いられる．

1.6 ウォルトの抽象添字

ウォルトの有名な現代的な教科書「General Relativity」が 1984 年に出版されて以来 [1]，彼の導入した抽象添字が研究の現場でしばしば用いられるようになった*7．本書でもこの添字をしばしば採用している．そこで簡単にこの抽象添字の紹介をしておこう*8．

ベクトルやテンソルはそもそも座標に依存しない概念であるため，添字を明記することなく前節のような表現を用いて計算することも可能である．しかし，それは実践向きではないことがしばしばある．そこで導入されたのが抽象添字である．例えばベクトル V と書いておくと，それが座標基底で書いたときに $V^\mu\partial_\mu$ なのか $V_\mu dx^\mu$ なのか不明である．そこでウォルトは前者を V^a，後者を V_a と書くことにしたのである．この添字 a は μ とは性質が異なる．つまり V^a や V_a はベクトルの成分ではないのである．ベクトル自身なのである．それが何者か明記するための添字に過ぎない．一方，V^μ や V_μ はベクトルの成分であり，ベクトルそのものではない．それらは単なる関数である．このような約束をした場合

$$V^a = V^\mu(\partial_\mu)^a, \quad V_a = V_\mu(dx^\mu)_a \tag{1.195}$$

と書いたりする．V^μ はベクトルではないが，∂_μ はベクトルなのである．

---

*7 1991 年に大学院に進んだ筆者は修士 1 年生のときに小玉英雄先生（当時助教授）指導のこの教科書の輪講に参加した．幾度となく挫けそうになったが，お蔭で鍛えられた．

*8 ウォルトの教科書の中での抽象添字の説明は筆者にはくどく感じるが気のせいだろうか．

第 2 章
アインシュタイン方程式

本章では標準的なアインシュタイン方程式の導出を行う．まず，潮汐力に注目し，アインシュタイン方程式の導出を試行錯誤で行う．そのあとで作用原理の立場から再導出を行う．

2.1 アインシュタイン方程式

2.1.1 重力の方程式へ

自由落下の思考実験から重力がその中で消せることを知っている．これを原理に格上げしたものが**等価原理**であった．この等価原理と一般相対性原理を一挙に数学的に表現できることを我々は知っている．これが前章のリーマン幾何学である．リーマン幾何学上のスカラー場，ベクトル場，テンソル場が物理量を表すと考えれば，それらを変数とした方程式は座標の取り方に依存しない．また，リーマン幾何学の接空間は重力が局所的にキャンセルされている（局所）慣性系の存在に対応させることができる．

では重力自体はどのように記述されるのであろうか．曲がった時空そのものが重力を表現していることは，等価原理から推測できるであろう．よって，計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ の一部が重力の情報を含んでいると考えられる．$g_{\mu\nu}$ を変数とした方程式を導けばよい．重力にも一般相対性原理を満たす必要があるが，局所的には消えない量としてリーマンテンソル $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ がある．

アインシュタイン方程式の導出はニュートン重力から導かれる結果と比較しながら行うのが健全である．等価原理から重力は局所的に常に消せるわけであるが，大きさを持つ物体の 2 点間の間に働く重力の差は消すことができない．これは潮汐力と呼ばれる我々の馴染みの現象である．この潮汐力を鍵としてアインシュタイン方程式の導出を試みる．

2.1.2 ニュートンの万有引力と潮汐力

まずはニュートンの万有引力の復習を行おう．万有引力の法則は，ポアッソン方程式によって記述される．

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho. \tag{2.1}$$

ここで ϕ は重力ポテンシャル，G はニュートンの重力定数，ρ は質量密度である．この方程式の解は

$$\phi(\boldsymbol{x}) = -G\int d^3x' \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{2.2}$$

と与えられる．天体から十分離れた場所で，重力ポテンシャルは

$$\phi \simeq -\frac{GM}{r} \tag{2.3}$$

と近似できる．M は天体の質量，r は天体の中心からの距離である．

次に潮汐力について考察を進めよう．先に述べたように潮汐力は大きさを持った物体に働く．ここで簡単のために大きさを持った物体として 2 点からなる系を考えることにしよう．各々の位置座標を $x^i(t)$ と $y^i(t)$ としよう．すると各々の運動方程式は

$$\ddot{x}^i(t) = -\partial^i\phi(x)|_{x=x(t)} \tag{2.4}$$

と

$$\ddot{y}^i(t) = -\partial^i\phi(x)|_{x=y(t)} \tag{2.5}$$

になる．ここで位置座標の差を

$$\xi^i(t) := x^i(t) - y^i(t) \tag{2.6}$$

で導入し二つの運動方程式の差をとると

$$\ddot{\xi}^i(t) = -\Big(\partial^i\phi(x)|_{x=x(t)} - \partial^i\phi(x)|_{x=y(t)}\Big). \tag{2.7}$$

ここで微小間隔を考え，左辺を ξ^i の 1 次まで展開すると

$$\ddot{\xi}^i(t) = -\partial_j\partial^i\phi(x)|_{x=x(t)}\xi^j(t) \tag{2.8}$$

が得られる．この方程式が潮汐力によって 2 点間の間隔の伸縮の振る舞いを記述している．

2.1.3 測地偏差方程式と潮汐力

重力場中の質点の運動方程式は，測地線の方程式に対応する．従って，潮汐力は 2 点間の測地線の間の差をとればよい．そこで図のように測地線束を考えることにしよう．そして測地線をラベリングするパラメータを ℓ とすると，測地線に垂直な自然なベクトル

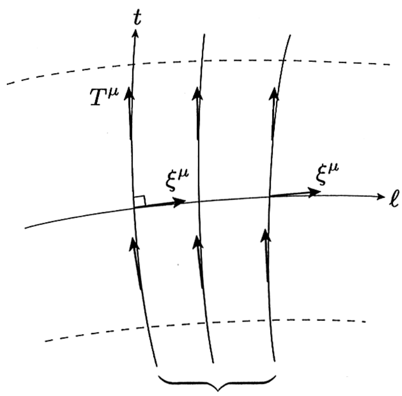


図 2.1　測地線の束の様子.

$$\xi^\mu = \frac{dx^\mu}{d\ell} \tag{2.9}$$

を考えることができる．いま $\xi = \partial_\ell, T = \partial_\tau$ と書いているので，互いに可換である，$[\xi, T]^a = 0$．よって

$$\xi^\mu \nabla_\mu T^\nu = T^\mu \nabla_\mu \xi^\nu \tag{2.10}$$

が確かに成り立つ．さて，T^μ は測地線の接ベクトルであるから

$$T^\mu \nabla_\mu T^\nu = 0 \tag{2.11}$$

が成り立っている．隣り合う測地線間の相対加速度は

$$a^\mu = T^\alpha \nabla_\alpha (T^\beta \nabla_\beta \xi^\mu) \tag{2.12}$$

である．これがニュートンの場合の $\ddot{\xi}^i(t)$ に対応する量である．この右辺の式変形を行うと

$$\begin{aligned} T^\alpha \nabla_\alpha (T^\beta \nabla_\beta \xi^\mu) &= T^\alpha \nabla_\alpha (\xi^\beta \nabla_\beta T^\mu) \\ &= (T^\alpha \nabla_\alpha \xi^\beta)(\nabla_\beta T^\mu) + T^\alpha \xi^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta T^\mu \\ &= (T^\alpha \nabla_\alpha \xi^\beta)(\nabla_\beta T^\mu) \\ &\quad + T^\alpha \xi^\beta (\nabla_\alpha \nabla_\beta T^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha T^\mu + \nabla_\beta \nabla_\alpha T^\mu) \\ &= (T^\alpha \nabla_\alpha \xi^\beta)(\nabla_\beta T^\mu) - T^\alpha \xi^\beta R_{\alpha\beta\nu}{}^\mu T^\nu \\ &\quad + T^\alpha \xi^\beta \nabla_\beta \nabla_\alpha T^\mu \\ &= \xi^a \nabla_\alpha (T^\beta \nabla_\beta T^\mu) - R_{\alpha\beta\nu}{}^\mu \xi^\beta T^\alpha T^\nu \\ &= -R_{\alpha\beta\nu}{}^\mu \xi^\beta T^\alpha T^\nu. \end{aligned} \tag{2.13}$$

ここで最初の等式で式 (2.10) を，4 番目の等式でリーマンテンソルの定義を，6 番目の等式で測地線の方程式 (2.11) を用いた．結局，相対加速度は

$$a^\mu = -R_{\alpha\beta\nu}{}^\mu \xi^\beta T^\alpha T^\nu \tag{2.14}$$

とリーマンテンソルで書けることが分かった．リーマンテンソルは座標変換で消えない幾何学的量である．これが**測地線偏差方程式**である．

2.2 アインシュタイン方程式の導出

いよいよアインシュタイン方程式の導出である．式 (2.8) と (2.14) を比べることから始めよう．おおまかには

$$R_{\alpha\beta\nu}{}^\mu \xi^\beta T^\alpha T^\nu \sim \partial_j \partial^i \phi(x)|_{x=x(t)} \xi^j(t) \tag{2.15}$$

が成り立つであろう．ニュートン重力の結果を 4 次元的に拡張し，両辺に掛かっている ξ を落とすと

$$R_{\nu\alpha\beta}{}^\mu T^\nu T^\beta \sim \partial_\alpha \partial^\mu \phi \tag{2.16}$$

となる．ここで両辺のトレースをとると

$$R_{\nu\beta} T^\nu T^\beta \sim \Delta\phi \tag{2.17}$$

となる．右辺にポアッソン方程式を用いると

$$R_{\nu\beta} T^\nu T^\beta \sim G\rho. \tag{2.18}$$

右辺はエネルギー・運動量テンソルを用いて表現することもできて

$$R_{\mu\nu} T^\mu T^\nu \sim \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu} T^\mu T^\nu \tag{2.19}$$

となる．ここで $T_{\nu\beta} T^\nu T^\beta \sim \rho c^4$ となることを用いた．よって，接ベクトルを払って

$$R_{\mu\nu} = \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.20}$$

が成り立つことが推測される．しかし，このままでは運動量・エネルギーテンソルに対して非物理的な条件が課されてしまうことが以下の議論から分かる．まず縮約されたビアンキ恒等的（式 (1.90)）

$$\nabla^\mu \Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \Big) = 0 \tag{2.21}$$

を，式 (2.20) から導かれる

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{G}{c^4} \Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \Big) \tag{2.22}$$

に適用すると

$$\nabla^\mu \Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \Big) = 0 \tag{2.23}$$

が導かれる．これは保存則と似て非なるものである．ここでエネルギー・運動

量テンソルが保存していること，即ち

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{2.24}$$

が成り立つとすると，式 (2.23) は

$$\nabla_\nu T = 0 \tag{2.25}$$

なる不自然な条件が課すことになってしまう．T は $T_{\mu\nu}$ のトレースであるが，それがゼロかあるいは時間にも空間にも依存しない限り成り立つことはない．ほとんどの現象に使えないことになる．

上の議論からすぐに気が付くことだが，式 (2.20) の左辺を縮約されたビアンキ恒等式で登場する組み合わせ $R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$ に置き換えてしまえば，$T_{\mu\nu}$ の保存則との相性がよくなる．不自然な条件は課されない．従って

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.26}$$

が重力場を記述する方程式の有力候補として考えられるであろう．ここで右辺の係数に 8π を挿入しておいた．これは次節でみるようにニュートン重力を係数も含めて再現するように選んだ．これが**アインシュタイン方程式**である．この方程式は

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{2.27}$$

ともしばしば表現される．また，式 (2.26) の左辺を $G_{\mu\nu}$ と書き，これを**アインシュタインテンソル**と呼ぶ[*1]．

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \tag{2.28}$$

2.3 ニュートン重力の再現

アインシュタイン方程式から弱い重力場中においてニュートンの運動方程式や重力方程式が再現できることを確認しておく．そこで，以下の (a)~(d) の条件が成り立つ状況を考える．(a) 計量でミンコフスキー計量からのずれが小さい，即ち，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$，$|h_{\mu\nu}| \ll 1$ が成り立つ．(b) $h_{\mu\nu}$ は時間に依存しない．(c) $g_{0i} = h_{0i} = 0$．(d) 粒子の速さは光速に比べ非常に遅い ($v/c \ll 1$)．

2.3.1 粒子の運動方程式

まずは重力場中の粒子の運動についてみてみよう．測地線の方程式は

---

*1 仮に 2 次元時空があったとしよう．このとき，式 (1.139) でみたようなアインシュタインテンソルは自明，即ち $G_{\mu\nu} = 0$ が自動的に任意の時空に対して満たされている．従って，2 次元時空の場合，この意味でアインシュタイン方程式は存在しない．3 次元時空はアインシュタイン方程式は存在する．ただし，局所的な自由度を担っているワイルテンソルは存在しない．大域的な自由度があるのみである．

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0. \tag{2.29}$$

ここでドットは固有時間 τ による微分であるが，今の近似では座標時間 t と同じと思ってよい（条件 (d)）．さて空間の成分に注目すると

$$\ddot{x}^i = -\Gamma^i_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta \simeq -\Gamma^i_{00}c^2 \tag{2.30}$$

となる．右辺の計算で再び条件 (d) を用いている．クリストッフェル記号は

$$\Gamma^i_{00} \simeq -\frac{1}{2}\partial^i h_{00} \tag{2.31}$$

と計算できるので，結局

$$\ddot{x}^i \simeq \frac{c^2}{2}\partial^i h_{00} \tag{2.32}$$

となる．これをニュートン力学の方程式 $\ddot{x}^i = -\partial^i\phi$ と比べると，重力ポテンシャルと計量が

$$\phi \simeq -\frac{c^2}{2}h_{00} \tag{2.33}$$

のように関係していることが分かる．

2.3.2 重力場の方程式

次にアインシュタイン方程式からポアッソン方程式が再現できることをみてみよう．式 (2.27) より

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right) \simeq \frac{4\pi G}{c^2}\rho. \tag{2.34}$$

ここで $g_{00} \simeq -1$, $T \simeq -T_{00} = -\rho c^2$, T_{ij} は (d) の仮定より T_{00} と比べて無視できる事実を用いた．弱い重力場中ではリッチテンソルは

$$R_{00} \simeq \partial_i\Gamma^i_{00} \simeq -\frac{1}{2}\Delta h_{00} \simeq \frac{1}{c^2}\Delta\phi \tag{2.35}$$

と重力ポテンシャルで書ける．ここで式 (2.33) を用いた．これを式 (2.34) の左辺に代入することによって

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \tag{2.36}$$

が得られる！

アインシュタイン方程式の残りの成分も気になるところである．まず非対角成分は

$$R_{0i} \simeq \partial_j\Gamma^j_{0i} - \partial_i\Gamma^j_{0j} \simeq 0 \tag{2.37}$$

で何も出てこない．次に空間成分について考えよう．まずリッチテンソルの (ij) 成分は

$$R_{ij} \simeq -\partial_j\Gamma^0_{i0} + \partial_k\Gamma^k_{ij} - \partial_j\Gamma^k_{ik}. \tag{2.38}$$

ここで空間部分の計量の平坦部分からのずれを

$$h_{ij} = 2(\psi/c^2)\delta_{ij} \tag{2.39}$$

のようにスカラー関数 ψ だけで書けているとする．このときクリストッフェル記号は

$$\Gamma^0_{i0} \simeq \frac{1}{c^2}\partial_i\phi, \ \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{c^2}\Big(\delta^k_i\partial_j\psi + \delta^k_j\partial_i\psi - \delta_{ij}\partial^k\psi\Big) \tag{2.40}$$

なので，リッチテンソルは

$$R_{ij} \simeq -\frac{1}{c^2}\partial_i\partial_j(\phi+\psi) - \frac{1}{c^2}\Delta\psi\delta_{ij} \simeq -\frac{4\pi G}{c^2}\rho \tag{2.41}$$

となる．このトレース部分から

$$\Delta(\phi + 4\psi) = -12\pi G\rho \tag{2.42}$$

が得られるが，式 (2.36) を用いると ψ に対する方程式が得られる．

$$\Delta\psi = -4\pi G\rho. \tag{2.43}$$

式 (2.36) の両辺を足すことによって

$$\Delta(\phi+\psi) = 0 \tag{2.44}$$

となる．すると遠方での境界条件から，この解は

$$\psi + \phi = 0 \tag{2.45}$$

となる．なお，式 (2.41) のトレースレス成分は

$$\Big(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta\Big)(\phi+\psi) = 0 \tag{2.46}$$

となるが，これは式 (2.45) が成り立つ場合自動的に満足していることが分かる．以上より，アインシュタイン方程式から矛盾なくポアッソン方程式が導かれることが分かった．まとめておくと，計量は

$$ds^2 \simeq -(1+2\phi/c^2)c^2dt^2 + (1-2\phi/c^2)\delta_{ij}dx^idx^j \tag{2.47}$$

で，ϕ は

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \tag{2.48}$$

を満たす．

実はアインシュタイン方程式を時間座標 t でみると，$|R_{ij}|/|R_{tt}| = O((v/c)^2)$ なので，通常 ij 成分は tt 成分と比べ高次のものとみなされる．

2.4 作用原理

2.2 節では試行錯誤することによってアインシュタイン方程式の導出に成功した．本節では最小作用原理によってアインシュタイン方程式の導出を行う．まずは復習を兼ねて，物質の作用原理から考察を行ってみよう．

2.4.1 物質場の作用

ここでは物質場の具体的な例として，スカラー場と電磁場を取り上げることにしよう．スカラー場の作用関数は

$$S_\phi = \int \mathcal{L}(\phi, \nabla\phi; g)\sqrt{-g}d^4x \tag{2.49}$$

と書ける．$\mathcal{L}$ はラグラジアン密度で，スカラー場 ϕ とその微分 $\nabla_\mu\phi$ にのみ依存するものとする．この作用関数を ϕ について変分を行うと

$$\begin{aligned}\delta S_\phi &= \int \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_\mu\phi}\delta\nabla_\mu\phi\Big)\sqrt{-g}d^4x \\ &= \int \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_\mu\phi}\Big)\delta\phi\sqrt{-g}d^4x \end{aligned}\tag{2.50}$$

となる．ここで 1 行目から 2 行目に移る際に，$\delta\nabla_\mu\phi = \nabla_\mu\delta\phi$ であることを用いた．また部分積分を行っていることに注意する．従って，変分原理よりスカラー場の方程式として

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_\mu\phi} = 0 \tag{2.51}$$

を得る．特に，スカラー場のラグランジアン密度として

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{2.52}$$

をとると，クライン・ゴルドン方程式

$$\nabla^2\phi - m^2\phi = 0 \tag{2.53}$$

が変分から得られる．

次に電磁場について考えよう．作用関数は

$$S_{\mathrm{em}} = -\frac{1}{4\mu_0}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-d}d^4x \tag{2.54}$$

で与えられる．ここで 4 次元のベクトルポテンシャル A_μ を用いて $F_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と定義されている．この作用を A_μ について変分を行ってみよう．すると

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{em}} &= -\frac{1}{4\mu_0}\int \delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\sqrt{g}d^4x \\ &= -\frac{1}{2\mu_0}\int (\delta F_{\mu\nu})F^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\mu_0}\int (\nabla_\mu \delta A_\nu - \nabla_\nu \delta A_\mu) F^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \\
&= -\frac{1}{\mu_0}\int (\nabla_\mu \delta A_\nu) F^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \\
&= \frac{1}{\mu_0}\int \delta A_\nu (\nabla^\mu F^{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x. \qquad (2.55)
\end{aligned}
$$

よって，真空中（電磁場の源がない）では $\delta S_{\rm em} = 0$ からマクスウェル方程式の一部

$$
\nabla^\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad (2.56)
$$

を得る．残りのマクスウェル方程式は $F_{\mu\nu}$ がベクトルポテンシャル A_μ 書けていることから恒等的に成り立つ

$$
\nabla_{[\alpha} F_{\mu\nu]} = 0 \qquad (2.57)
$$

が対応している．

2.4.2 エネルギー・運動量テンソル

さて物質場の作用は計量 $g_{\mu\nu}$ にも依存している．その変分を計量でとり

$$
\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \qquad (2.58)
$$

と書くことにしよう．この $T_{\mu\nu}$ が**エネルギー・運動量テンソル**と呼ばれるものである．

具体例として電磁場の場合を考えよう．

$$
\begin{aligned}
\delta S_{\rm em} &= -\frac{1}{4\mu_0}\delta\left(\int F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\sqrt{-g}d^4x\right) \\
&= -\frac{1}{4\mu_0}\int F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\sqrt{-g})d^4x \\
&= \frac{1}{2\mu_0}\int \left(F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2\right)\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}d^4x \qquad (2.59)
\end{aligned}
$$

となるので，$T_{\mu\nu}$ の定義から

$$
T^{(\rm em)}_{\mu\nu} = \frac{c}{\mu_0}\left(F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2\right) \qquad (2.60)
$$

と電磁気学で登場するエネルギー運動量テンソルに一致している．慣れると分かることであるが，被積分関数の $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ において添字をあげている $F^{\mu\nu}$ を下げた形で意図的に表現し直している．これは添字をすべて下げた $F_{\mu\nu}$ が計量に依存しないからである．そのため 1 行目から 2 行目に行く際に，計量についての変分は $F_{\mu\nu}$ に作用せずにすり抜けている．また，逆行列の定義から

$$
\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta} \qquad (2.61)
$$

と，行列式の定義から

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{2.62}$$

と計算されることを用いている．なお，これらを合わせて

$$\begin{aligned}
&\delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\sqrt{-g}) \\
&\quad = -\delta g_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}g^{\alpha\sigma}g^{\nu\beta}\sqrt{-g} - \delta g_{\rho\sigma}g^{\nu\rho}g^{\beta\sigma}g^{\mu\alpha}\sqrt{-g} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\sigma}\delta g_{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{2.63}$$

となる．

2.4.3 重力場の作用

重力場の作用について考える．重力場を表す変数は計量 $g_{\mu\nu}$ である．計量に関する運動方程式を期待しているわけであるから，計量の微分を含んだ形で作用に入ってくるはずである．また，ラグランジアン密度は一般相対性原理からスカラー量で書けているはずである．計量の微分で書かれるもっとも単純なスカラー量はリッチスカラー R である．そこで重力場の作用として

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G}\int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x \tag{2.64}$$

を考えてみよう．ここで Λ は定数で**宇宙定数**と呼ばれている．重力場の伝播という意味ではこの宇宙定数は意味がないが，宇宙論を議論する際に重要となってくる．

以下の計算では計量の変分を

$$\delta g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} =: h_{\mu\nu} \tag{2.65}$$

と書こう．すると例えば

$$\delta g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu} \tag{2.66}$$

や

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \tag{2.67}$$

と書ける．ここで $h^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$．また，リッチスカラーの変分は

$$\delta R = -R^{\mu\nu}h_{\mu\nu} + \nabla^\mu\nabla^\nu h_{\mu\nu} - \nabla^2 h \tag{2.68}$$

と計算される．これらを用いると作用の変分は

$$\begin{aligned}
\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G}\int \Big(&-R^{\mu\nu}h_{\mu\nu} + \nabla^\mu\nabla^\nu h_{\mu\nu} - \nabla^2 h \\
&+ \frac{1}{2}g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}(R - 2\Lambda)\Big)\sqrt{-g}d^4x
\end{aligned} \tag{2.69}$$

となる．ここで被積分関数の第 2 項と第 3 項は全積分のため運動方程式には効かないことに注意する*2．一方で物質場の作用を計量で変分をとると

*2 境界がある場合は特別な扱いが必要である．4.5 節参照．

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x. \tag{2.70}$$

以上より，全作用関数 $S = S_g + S_m$ に対する変分原理

$$\delta S = 0 \tag{2.71}$$

から，重力場の方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.72}$$

を得る．

上記変分の際に以下の公式を用いた．

$$\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha h^\mu_\beta + \nabla_\beta h^\mu_\alpha - \nabla^\mu h_{\alpha\beta}). \tag{2.73}$$

$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ は計量 $g_{\mu\nu}$ に対してテンソルとしてふるまう．$\delta R_{\mu\nu}$ も $g_{\mu\nu}$ に対してテンソルとふるまうことを考慮すると計算は比較的単純に実行できて

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \nabla_\alpha \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} \\ &= \frac{1}{2}(\nabla_\alpha\nabla_\mu h^\alpha_\nu + \nabla_\alpha\nabla_\nu h^\alpha_\mu - \nabla^2 h_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu h),\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}\delta R &= \delta(g^{\mu\nu}R) \\ &= -h^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\ &= -h_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \nabla^\mu\nabla^\nu h_{\mu\nu} - \nabla^2 h\end{aligned} \tag{2.75}$$

となる．

2.5 一般共変性と保存則

一般共変性から直ちに成り立つ保存則が存在する（ネーターの定理）．いま変分を座標変換で生成されるものだけに限ることとする．このとき計量の変分は

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = \pounds_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu \tag{2.76}$$

と書かれる（式 (1.107) 参照）．さて，重力の作用，物質の作用，各々共変的に書かれている．従って，各々について

$$\delta_\xi S_g = 0, \tag{2.77}$$

$$\delta_\xi S_m = 0 \tag{2.78}$$

が成り立つ．重力部分については

$$\begin{aligned}0 = \delta_\xi S_g &= \frac{c^3}{16\pi G}\int\Big(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\Big)\delta_\xi g_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \\ &= \frac{c^3}{16\pi G}\int\Big(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\Big)(\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu)\sqrt{-g}d^4x\end{aligned}$$

$$= \frac{c^3}{8\pi G}\int\Big(-R^{\mu\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\Big)\nabla_\mu\xi_\nu\sqrt{-g}d^4x$$
$$= \frac{c^3}{8\pi G}\int\nabla_\mu\Big(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\Big)\xi_\nu\sqrt{-g}d^4x \tag{2.79}$$

となる．3行目から4行目に移る際に部分積分を用いた．ξ^μ が任意であるので，上式から縮約されたビアンキ恒等式

$$\nabla^\mu\Big(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big)=0 \tag{2.80}$$

が導かれる．また，物質の部分からは

$$0=\delta_\xi S_m=\frac{1}{2c}\int T^{\mu\nu}\delta_\xi g_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x$$
$$=\frac{1}{2c}\int T^{\mu\nu}(\nabla_\mu\xi_\nu+\nabla_\nu\xi_\mu)\sqrt{-g}d^4x$$
$$=\frac{1}{c}\int T^{\mu\nu}\nabla_\mu\xi_\nu\sqrt{-g}d^4x$$
$$=-\frac{1}{c}\int\nabla_\mu T^{\mu\nu}\xi_\nu\sqrt{-g}d^4x \tag{2.81}$$

となるため，重力部分と同様に

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}=0 \tag{2.82}$$

が導かれる．この式は保存則に対応しているが，一般に大域的保存量が存在するとは限らない．時空に対称性が存在する，あるいは漸近的な対称性が存在する場合，それらの対称性に付随した準局所的な，あるいは大域的な保存量を構成することができる．ここでは時空に対称性がある場合に限って議論をすることにしよう．大域的な場合は後の第6章で別途議論することにする．

時空にキリングベクトル ξ^μ が存在したとする．このとき

$$\nabla^\mu(T_{\mu\nu}\xi^\nu)=(\nabla^\mu T_{\mu\nu})\xi^\nu+T_{\mu\nu}\nabla^\mu\xi^\nu$$
$$=\frac{1}{2}T_{\mu\nu}(\nabla^\mu\xi^\nu+\nabla^\nu\xi^\mu)=0 \tag{2.83}$$

が成り立つ．$T^\mu_\nu\xi^\nu$ は反変ベクトルとしてふるまうので

$$\nabla_\mu(T^\mu_\nu\xi^\nu)=\partial_\mu(T^\mu_\nu\xi^\nu)+\Gamma^\mu_{\mu\rho}T^\rho_\nu\xi^\nu$$
$$=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\xi_\nu) \tag{2.84}$$

となる．よって，式 (2.83) は

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\xi_\nu)=0 \tag{2.85}$$

と書くことができる．例えば ξ^μ が時間的なキリングベクトルとすると，空間的な超曲面 Σ 上についての積分量

$$\int_\Sigma T_{\mu\nu}\xi^\nu d\Sigma^\mu \tag{2.86}$$

は遠方で $T^\mu_\nu\xi^\nu$ が十分速く落ちるならば保存量となる．

第 3 章
厳密解

アインシュタイン方程式は複雑な非線形方程式であるが，対称性を課すことによって厳密解を得ることができる．現実の世界の一部は得られた厳密解に摂動などを加えることで記述される．本章では代表的なブラックホールと宇宙論的な解の導出を行う．また，高次元ブラックホール，カルツア・クライン泡，多重ブラックホール解の導出を行う．

3.1 4次元ブラックホール解

ブラックホールには天体物理学的なものと素粒子的なものに大別される．前者は重たい恒星の重力崩壊などによって形成されると考えられている．サイズや質量はまちまちである．また，宇宙全体は正味中性であると考えるのが自然であるので，形成されたブラックホールは中性であると考えられる．形成当初電荷を持っていたとしても，反対の電荷がすばやく吸収され中性化するであろう．一方で素粒子的なブラックホールはそれ自体が「素粒子」であるので，電荷を持っていると考えるのが自然である．また，そのサイズは素粒子サイズであろう．ここでは中性ブラックホールとしてシュバルツシルト解とカー解を，帯電したものとしてライシュナー・ノルドシュトローム解を取り上げよう．本節では 4 次元時空を考える[*1]．

---

*1 高次元時空の場合は後の 3.3.1 節で扱う．ところで低次元の場合どうだろうか．2 次元時空の場合，アインシュタイン方程式が存在しない．時空を決める式がないのである．3 次元時空においてワイルテンソルはゼロであるものの，アインシュタイン方程式は存在する．しかし，素朴には 3 次元では重力が log 的にふるまい弱くなるため，ブラックホールが形成されにくくなることが予想される．実際に漸近的に平坦な 3 次元時空においてブラックホールがないことが井田によって示されている [D. Ida, Phys. Rev. Lett. **85**, 3758 (2000)]．ただし，負の宇宙項を持つ漸近的に反ドジッター時空の場合，ブラックホール解（BTZ 解）が存在する [M. Banados, C. Teitelboim, J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. **69**, 1849 (1992)]．

3.1.1 シュバルツシルト解

真空のアインシュタイン方程式 $R_{\mu\nu}=0$ に従う静的で球対称な解を探してみよう．この解は回転のない球対称な天体の周りの真空領域やブラックホール時空を表す．なお，あとで議論するように真空で球対称な時空の領域は静的になること（3.1.3 節参照），真空で静的ならば球対称になること（7.6.1 節参照）が証明されている．

さて，静的な時空の計量は一般に

$$ds^2=-f(x^i)(cdt)^2+g_{ij}(x^k)dx^idx^j \tag{3.1}$$

と書ける．計量の成分は時間 t には依存しない．また今の場合 $g_{0i}=0$ であるが，回転があるような定常時空では g_{0i} はゼロではない．今この計量に対して

$$\xi^\mu=\frac{dx^\mu}{dt} \tag{3.2}$$

はキリングベクトルであることを確かめることができる．

次に時空に球対称性を課すことにしよう．すると，まず球対称な 2 次元面の計量は，その面積半径を r とすると

$$r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \tag{3.3}$$

と書くことができる．次に一つの球対称面から垂直方向に測地線をあらゆる方向に放てば，続く球対称な 2 次元面はすべて測地線に垂直になるように常にとることができる．垂直でないとすると，特別なベクトルの向きが存在することになってしまい，球対称性でなくなる．結局のところ空間部分の計量は

$$g_{ij}(x^k)dx^idx^j=h(r)dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\phi^2) \tag{3.4}$$

となる．時間部分も合わせて

$$\begin{aligned}ds^2&=-f(r)(cdt)^2+h(r)dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\phi^2)\\&=-f(r)(cdt)^2+h(r)dr^2+r^2\sigma_{AB}dx^Adx^B\end{aligned} \tag{3.5}$$

と書くことができる．2 行目で単位球面の微小面積要素の部分を $\sigma_{AB}dx^Adx^B$ と書いた．ここで $A,B=2,3$ で $x^2=\theta$, $x^3=\phi$ とする．このように書いておいたほうが球対称性を活かした計算が実行可能である．

次にクリストッフェル記号を計算しよう．その結果は

$$\begin{aligned}&\Gamma^0_{r0}=\frac{f'}{2f},\quad \Gamma^r_{00}=\frac{f'}{2h},\quad \Gamma^r_{rr}=\frac{h'}{2h},\\&\Gamma^r_{AB}=-\frac{r}{h}\sigma_{AB}=-\frac{g_{AB}}{rh},\quad \Gamma^A_{rB}=\frac{1}{r}\delta^A_B.\end{aligned} \tag{3.6}$$

それ以外の成分はゼロ．「$'$」は r 微分である．次にリッチテンソルを計算すると

$$\begin{aligned}R_{00}&=\partial_r\Gamma^r_{00}+(\Gamma^r_{rr}-\Gamma^0_{r0}+\Gamma^A_{rA})\Gamma^r_{00}\\&=\frac{f''}{2h}+\frac{h'f'}{4h^2}-\frac{f'^2}{4hf}+\frac{f'}{rh},\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$R_{rr} = -\partial_r \Gamma^0_{r0} - \partial_r \Gamma^A_{rA} + (\Gamma^0_{r0} + \Gamma^A_{rA})\Gamma^r_{rr} - (\Gamma^0_{0r})^2 - \Gamma^A_{rB}\Gamma^B_{rA}$$
$$= -\frac{f''}{2f} + \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{f'h'}{4fh} + \frac{h'}{rh}, \tag{3.8}$$

$$R_{AB} = {}^{(2)}R_{AB} + \partial_r \Gamma^r_{AB} + (\Gamma^0_{r0} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^C_{rC})\Gamma^r_{AB}$$
$$-\Gamma^r_{AC}\Gamma^C_{rB} - \Gamma^r_{BC}\Gamma^C_{rA}$$
$$= \sigma_{AB} + \left[-\frac{1}{h} - \frac{rf'}{2fh} + \frac{rh'}{2h^2}\right]\sigma_{AB} \tag{3.9}$$

となる．ここで ${}^{(2)}R_{AB}$ は 2 次元球面のリッチテンソルで，今の場合

$${}^{(2)}R_{AB} = \sigma_{AB} \tag{3.10}$$

が成り立つ．

添字の一つを上にあげておくと

$$R^0_0 = -\frac{1}{2\sqrt{fh}}\left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right)' - \frac{f'}{rhf} = 0, \tag{3.11}$$

$$R^r_r = -\frac{1}{2\sqrt{fh}}\left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right)' + \frac{h'}{rh^2} = 0, \tag{3.12}$$

$$R^A_B = \left[\frac{1-h^{-1}}{r^2} - \frac{f'}{2rfh} + \frac{h'}{2rh^2}\right]\delta^A_B = 0 \tag{3.13}$$

となる．

式 (3.12) から (3.11) を引くことによって

$$\frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} = 0. \tag{3.14}$$

これを r について積分すると

$$f = h^{-1} \tag{3.15}$$

となる．ここで，時間座標をスケールすることで一般性を失うことなく常に式 (3.15) のようになるように積分定数をとることができる．これを式 (3.13) に代入すると

$$(rf)' = 1 \tag{3.16}$$

となる．これも積分できて

$$f(r) = h^{-1}(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - \frac{r_g}{r} \tag{3.17}$$

となる．ここで

$$r_g := \frac{2GM}{c^2} \tag{3.18}$$

とした．係数は遠方で重力ポテンシャル ϕ を用いて $g_{00} \simeq -1 - 2\phi/c^2$ と書けることから決めている（式 (2.47)）．

以上まとめると，解は

$$ds^2 = -f(r)(cdt)^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2\sigma_{AB}dx^A dx^B \tag{3.19}$$

となる．ここで $f(r)$ は式 (3.17) で与えられる．これがシュバルツシルト解である．ニュートンポテンシャルとの比較から M が質量を表していると考えられる．そこで以下ではこの質量は正と仮定し話を進めることにする．

この解の計量は $r = r_g$ で $f(r) = 0$ となり，一見特異な振る舞いを示す．実はこれがブラックホールの表面を表している．まずはリーマンテンソルの振る舞いから見てみよう．すると

$$R_{abcd}R^{abcd} \propto \frac{1}{r^4} \tag{3.20}$$

であるから，原点 $r = 0$ のみが真の特異点である．なお，$r < r_g$ では $f(r) < 0$ となるため，時間座標 t が空間座標のように，動径座標 r が時間座標のようにふるまう．そのため，時空の静的な領域は $r > r_g$ に限られていることに注意する．$r < r_g$ では動的になっている．

時空の大域的構造をみるために光をとばしてみよう．計量の悪い振る舞いは $(t,t), (r,r)$ 成分にのみ含まれるので，以下では角度方向は簡単のため無視する．動径方向に伝播する光線に沿って

$$-c^2 f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 = 0 \tag{3.21}$$

が成り立つことに注意する．よって，光線に沿って

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{r}{r - r_g}\right)^2 \tag{3.22}$$

を満足する．これは簡単に積分できて

$$ct = \pm r_* + \text{constant} \tag{3.23}$$

となる．ここで r_* は亀座標と呼ばれ

$$r_* = r + r_g \ln(r/r_g - 1) \tag{3.24}$$

で与えられる．これらが各光線に沿った軌道の方程式であるが，各光線はその積分定数によってラベルされる．このラベル付けが光を用いた新しい座標の導入の余地を与える．即ち

$$u := ct - r_*, \tag{3.25}$$

$$v := ct + r_* \tag{3.26}$$

で光的座標 (u, v) を定義する．これらを用いると角度方向を無視した時空の計量は

$$ds^2 = -(1 - r_g/r)dudv = -\frac{r_g}{r}e^{(v-u)/2r_g}e^{-r/r_g}dudv \tag{3.27}$$

となる．ただし

$$r = r_g \longleftrightarrow (u, v) = (\infty, -\infty) \tag{3.28}$$

の対応であるから，実は上の計量の成分の因子 $e^{(v-u)/2r_g}$ が $r = r_g$ において
ゼロになっているため依然特異性は残っている．そこで

$$U = -e^{-u/2r_g}, \quad V = e^{v/2r_g} \tag{3.29}$$

のように新たな座標 (U, V) を導入すると，計量は

$$ds^2 = -\frac{4r_g^3}{r} e^{-r/r_g} dU dV \tag{3.30}$$

となり，$r = r_g$ で正則な形になる．なお，$r = r_g$ は (U, V) 座標の "原点"

$$(U, V) = (0, 0) \tag{3.31}$$

に対応している．(U, V) の変域は座標変換の形から $-\infty < U < 0$, $0 < V < \infty$ であるが，一旦 (U, V) で計量を表現すると，$U = V = 0$ における特異性は消えるわけであるから，(U, V) の変域を実空間全体に解析接続することが可能である．最後に新たに新しい座標を

$$cT = \frac{U + V}{2}, \tag{3.32}$$

$$X = \frac{V - U}{2} \tag{3.33}$$

で定義すると，計量全体は

$$ds^2 = \frac{4r_g^3 e^{-r/r_g}}{r}(-c^2 dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega_2^2 \tag{3.34}$$

と書ける．(t, r) と (T, X) との関係は

$$(r/r_g - 1)e^{r/r_g} = X^2 - c^2T^2, \tag{3.35}$$

$$ct/r_g = \ln\left(\frac{cT + X}{X - cT}\right) = 2\tanh^{-1}(cT/X) \tag{3.36}$$

で与えられる．この (T, X) は**クルスカル座標**と呼ばれる．r 座標との対応は

$$r = r_g \longleftrightarrow c^2T^2 = X^2, \tag{3.37}$$

$$r = 0 \quad \longleftrightarrow -1 = X^2 - c^2T^2, \tag{3.38}$$

$$r > 0 \quad \longleftrightarrow X^2 - c^2T^2 > -1 \tag{3.39}$$

となる．また時間座標 t に関しては

$$t = \text{constant} \longleftrightarrow cT/X = \text{constant}. \tag{3.40}$$

これらを念頭に (T, X) 平面上にシュバルツシルト時空を描いてみると図 3.1 のようになる．図中では光的方向は 45° 方向であることに注意する．$r = r_g$ を超えて解析接続できたおかげで時空の大域的構造が明らかとなった．$r = 0$ は曲率が発散しているため真の特異点であることを思い出そう．ここで図のように

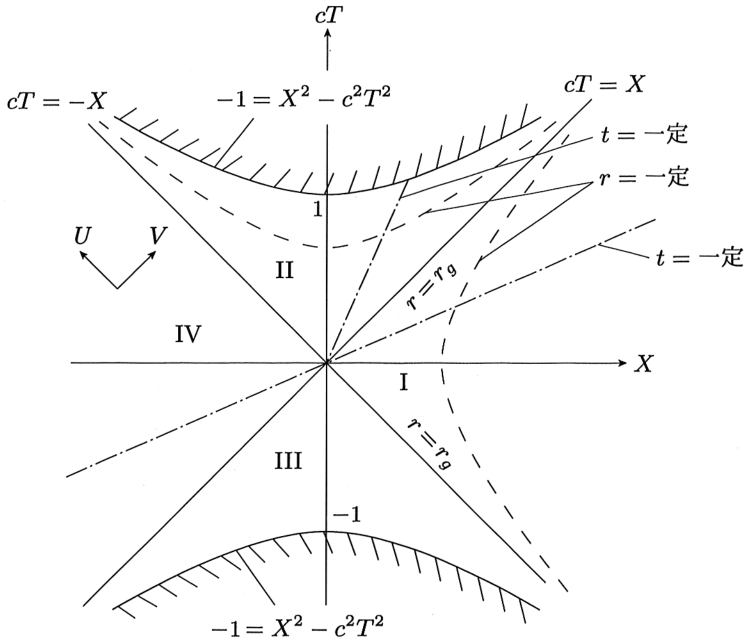


図 3.1　シュバルシルト時空.

領域を I〜IV に分けよう．I の領域は $r \to \infty$ で漸近的に平坦な時空に近づく．一方で領域 II は特別である．そこで放たれた光は外に出ることはなく，$r = 0$ の特異点に必ず達してしまうことが分かる．従って，領域 II がブラックホールである．そして $r = r_g$ がその境界になっていて，事象の地平面と呼ばれている．領域 III は時空が静的であるがゆえに人工的に出現した領域であると考えられている．その領域から放たれた光や粒子は，ブラックホールとは対照的にその領域内にとどまることができない．この領域はホワイトホールと呼ばれている．興味深いことに解析接続によって領域 IV も存在する．この領域は I の領域と同じ性質を持つ．しかし，I の領域とは異なるもので，他の宇宙を表していると解釈される．I と IV の領域は時間あるいは光的曲線で結ばれない領域であるため因果的に関係を互いに持たない．

このようにシュバルツシルト時空は興味深い時空構造を持つが，現実の重力崩壊で形成されるものは幾分異なる．まず時空の星のある領域は真空ではなく物質が詰まっている．I, II の一部と III と IV の領域が星の解に置き換わる．従って，ホワイトホールや他の宇宙は現実的な世界では存在しない．

この節の最後に質量が負の場合についてコメントしておこう．負の場合，$f(r) = 0$ となる場所はなく，時空全域で静的となる．従って，事象の地平線は存在せず $r = 0$ の真の特異点は遠方の観測者から観測可能である．このような事象の地平面に隠されていない特異点を裸の特異点と呼ぶ．実際の重力崩壊で裸の特異点は形成されないと考えられている．

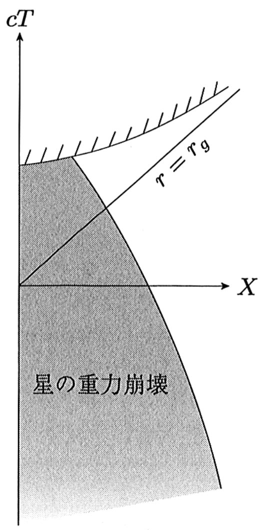


図 3.2 星の重力崩壊とシュバルシルト時空.

3.1.2 ライシュナー・ノルドシュトローム解

次に電場を伴なう球対称解を考える.

いま考えている系の作用は重力と電磁場からの二つからなる.

$$S = \frac{c^3}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}d^4x - \frac{1}{4\mu_0}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x. \tag{3.41}$$

計量について変分をとることによって，アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{\mu_0 c^3}\left(F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{3.42}$$

を得る．両辺にトレースをとってみると，右辺がゼロとなるためリッチスカラーがゼロ

$$R = 0 \tag{3.43}$$

となる．よってアインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{\mu_0 c^3}\left(F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) =: \mathcal{T}_{\mu\nu} \tag{3.44}$$

と書くこともできる.

真空の場合と同様に計量の形は

$$ds^2 = -f(r)(dx^0)^2 + h(r)dr^2 + r^2\sigma_{AB}dx^A dx^B \tag{3.45}$$

としてよい．今は静電場を伴なった解に関心があるので，ベクトルポテンシャルを

$$A_\mu dx^\mu = -\frac{\phi}{c}dx^0 \tag{3.46}$$

としてみよう．リッチテンソルの計算は真空の場合と同じである．前節からの変更点は右辺に電場によるソース項が存在することであり，それらは

$$\mathcal{T}_0^0 = \mathcal{T}_r^r = -\frac{4\pi G}{\mu_0 c^5}\frac{\phi'^2}{fh} = -\alpha\frac{\phi'^2}{fh},$$
$$\mathcal{T}_B^A = \alpha\frac{\phi'^2}{fh}\delta_B^A \tag{3.47}$$

と計算される．ここで $\alpha = 4\pi G/\mu_0 c^5$ とした．結局アインシュタイン方程式は

$$R_0^0 = -\frac{1}{2\sqrt{fh}}\left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right)' - \frac{f'}{rhf} = -\alpha\frac{\phi'^2}{fh}, \tag{3.48}$$

$$R_r^r = -\frac{1}{2\sqrt{fh}}\left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right)' + \frac{h'}{rh^2} = -\alpha\frac{\phi'^2}{fh}, \tag{3.49}$$

$$R_B^A = \left[\frac{1-h^{-1}}{r^2} - \frac{f'}{2rfh} + \frac{h'}{2rh^2}\right]\delta_B^A = \alpha\frac{\phi'^2}{fh}\delta_B^A \tag{3.50}$$

の 3 つとなる．

さて，式 (3.48) と (3.49) の右辺が同じであることに注意しよう．すると前小節と同様に，式 (3.48) から (3.49) を引くことによって

$$f = h^{-1} \tag{3.51}$$

が導かれる．これを式 (3.50) に代入すれば，真空の場合は f が求まったが，今の場合，右辺にソース項が存在する．そこで ϕ について解を求めておく必要がある．ϕ を支配しているマクスウェル方程式の非自明な成分は

$$\begin{aligned}\nabla_\mu F^\mu{}_0 &= \partial_r F^r{}_0 - \Gamma^r_{00}F^0{}_r + \Gamma^r_{rr}F^r{}_0 + \Gamma^A_{rA}F^r{}_0\\ &= f\left(\partial_r F_{r0} + \frac{2}{r}F_{r0}\right)\\ &= -\frac{f}{c}\left(\phi'' + \frac{2}{r}\phi'\right) = 0\end{aligned} \tag{3.52}$$

である．この方程式の解は直ちに求められて

$$\phi = \frac{q}{r} \tag{3.53}$$

となる．q は電荷に比例する定数である．この解と式 (3.51) を式 (3.50) に代入すると

$$(rf)' = 1 - \frac{\alpha q^2}{r^2} \tag{3.54}$$

を得る．これを 1 階積分することで

$$f = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\alpha q^2}{r^2} \tag{3.55}$$

と求められる．これが**ライシュナー・ノルドシュトローム解**である．以下では簡単のために $Q^2 := \alpha q^2$ と書くことにしよう．結局

$$f = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \tag{3.56}$$

となる．

シュバルツシルト解と異なり，$f(r)=0$ の根の数は質量と電荷の大小関係で決まる．具体的には以下の通り．

(i) $r_g^2 > 4Q^2$ の場合，$f(r)=0$ の根は

$$r_\pm = \frac{r_g \pm \sqrt{r_g^2 - 4Q^2}}{4} \tag{3.57}$$

の二つ．$r_- < r_+$ であるから，$r = r_+$ が事象の地平面に対応していることが予想される．ここでは割愛するが，シュバルツシルト時空と同様の解析によって，$r = r_+$ の特異性は座標によることが分かり，クルスカル座標を導入することによって取り除くことができる．また，$r = r_-$ の特異性も新しい座標の導入によって取り除かれる．時間座標の振る舞いをみてみよう．$f(r)$ の符号の変化に合わせて，$r > r_+$ では時間的，$r_+ > r > r_-$ では空間的，$r_- > r > 0$ では時間的にふるまう．シュバルツシルト時空と異なる点は，ブラックホールの内側の $0 < r < r_-$ 領域で時間座標が再び時間方向に向く点である．従って，真の特異点が存在する $r=0$ は因果構造としては時間方向に向いていることを意味する．仮にブラックホールの内部に入る観測者がいるとすれば，特異点に当たることなく他の宇宙へ通り抜けられることを意味している．

(ii) $r_g^2 = 4Q^2$ の場合，$f(r)=0$ の根は重根となる．

$$r_+ = r_- = r_g/4. \tag{3.58}$$

M を用いると

$$GM/c^2 = |Q| \tag{3.59}$$

となり，重力と電磁気力のつり合いの条件となっている．このような力のつり合いが成り立っている状況下では，多重ブラックホール解が構成できる（マジュンダー・パパペトロウ解．3.3.3 節参照）．

事象の地平面近傍の時空構造を調べてみよう．今の場合，計量は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{|Q|}{r}\right)^2 c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{|Q|}{r}\right)^2} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \tag{3.60}$$

$r = |Q|$ 近傍で $r = |Q|(1+\rho^{-1})$ と座標 ρ を導入すると，計量は近似的に

$$ds^2 \simeq \rho^{-2}(-dt^2 + d\rho^2) + Q^2 d\Omega_2^2 \tag{3.61}$$

と書ける．第 1 項が 3.2.3 節で説明する 2 次元反ド・ジッター時空．第 2 項が 2 次元球面となっている．事象の地平面近傍で対称性が高くなっている*2．

*2 例えば，G. W. Gibbons, G. T. Horowitz, P. K. Townsend, Class. Quant. Grav. **12**, 297 (1995) にその記述がある．これは非常に重要な意味を持っている．マルダセナによって提唱された重力/ゲージ理論対応 [J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998)] はこの観察に基づいている．厳密解に潜む対称性を発見できれば，そこに新しいパラダイムが潜んでいるかもしれない．

(iii) $r_g^2 < 4Q^2$ の場合，$f(r)=0$ の根がない．よって，事象の地平面は存在せず $r=0$ が外部から観測できる裸の特異点となっている．現実にはこのような場合は存在しないと考えられている．

3.1.3 バーコフの定理

真空球対称時空の解は静的なシュバルツシルト時空解に限られることが示される．これは球対称な静的な星の平衡解の外部解はシュバルツシルト時空によって記述されることを保証する．

球対称な時空の一般的な計量は

$$ds^2 = -f(r,t)(dx^0)^2 + h(r,t)dr^2 + 2k(r,t)drdx^0 + R(r,t)^2 d\Omega_2^2 \tag{3.62}$$

で与えられる．g_{0A} や g_{rA} 成分がゼロとできるのは，球対称面に特別な方向がないことから保証されている．4 つの任意関数に対して 2 つの座標の自由度が残されている．これを利用し

$$k(r,t) \to 0, \quad R(r,t) \to r \tag{3.63}$$

ととることにする．よって，計量は

$$ds^2 = -f(r,t)(dx^0)^2 + h(r,t)dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \tag{3.64}$$

となる．「$\cdot$」は $x^0 = ct$ 微分である．このときゼロでないクリストッフェル記号は

$$\begin{aligned}&\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{f}}{f},\quad \Gamma^0_{0r} = \frac{f'}{2f},\quad \Gamma^0_{rr} = \frac{\dot{h}}{2f},\quad \Gamma^r_{00} = \frac{f'}{2h},\quad \Gamma^r_{0r} = \frac{\dot{h}}{2h},\\ &\Gamma^r_{rr} = \frac{h'}{2h},\quad \Gamma^r_{AB} = -\frac{r}{h}\sigma_{AB},\quad \Gamma^A_{rB} = \frac{1}{r}\delta^A_B,\quad \Gamma^A_{BC} = {}^{(2)}\Gamma^A_{BC}\end{aligned} \tag{3.65}$$

となる．まず，アインシュタイン方程式の $(0,r)$ 成分は

$$R_{0r} = \frac{\dot{h}}{rh} = 0 \tag{3.66}$$

となる．これから直ちに h は時間座標 t に依存しないことが分かる．

$$h(r,t) = h(r). \tag{3.67}$$

残りのアインシュタイン方程式は

$$R_{00} = \frac{1}{2}\left(\frac{f'}{h}\right)' + \frac{f'}{4h}\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right) + \frac{f'}{rh} = 0, \tag{3.68}$$

$$R_{rr} = -\frac{h}{f}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{f'}{h}\right)' + \frac{f'}{4h}\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right)\right] + \frac{h'}{rh} = 0, \tag{3.69}$$

$$R_{AB} = \left[-\frac{rf'}{2fh} + \frac{rh'}{2h^2} + 1 - \frac{1}{h}\right]\sigma_{AB} = 0 \tag{3.70}$$

となる．第 1 式に h/f を掛けて，第 2 式を足すと

$$\frac{f'}{f}+\frac{h'}{h}=0 \tag{3.71}$$

となる．これを積分すると

$$f(r,t)h(r)=C(t). \tag{3.72}$$

従って，計量は

$$ds^2=-\frac{C(t)}{h(r)}(dx^0)^2+h(r)dr^2+r^2d\Omega_2^2 \tag{3.73}$$

となる．ここで時間の座標を

$$C^{1/2}dx^0\to dx^0 \tag{3.74}$$

と選び直すと，

$$ds^2=-\frac{1}{h(r)}dt^2+h(r)dr^2+r^2d\Omega_2^2 \tag{3.75}$$

となる．これは静的な計量である．真空静的ならば解はシュバルツシルト時空になる．これが**バーコフの定理**である．

この定理は電磁場や宇宙定数がある場合も成り立つ．

3.1.4 カー解

天体の重力崩壊によって形成されるブラックホールは一般には回転している．その最終状態での時空は定常な時空で十分よく近似される．

キリングベクトルを ∂_t と書いたとき，定常時空の計量は一般には

$$ds^2=g_{00}(dx^0)^2+2g_{0i}dx^0dx^i+g_{ij}dx^idx^j \tag{3.76}$$

と書ける．ここで g_{00}, g_{0i}, g_{ij} は時間座標 t に依存しない関数．この漸近的に平坦な 4 次元真空の定常ブラックホール解は軸対称性が自動的に保証され，カー解に限られることが知られている（唯一性定理．詳しくは 7.6.3 節参照）．軸対称性を表すキリングベクトルを ∂_ϕ と書き，動径座標と残りの角度座標を各々 r,θ と書くと，その計量は

$$\begin{aligned}ds^2=&-\frac{\Delta-a^2\sin^2\theta}{\Sigma}(dx^0)^2-2a\sin^2\theta\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}dx^0d\phi\\&+\frac{(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\phi^2+\frac{\Sigma}{\Delta}dr^2+\Sigma d\theta^2\end{aligned} \tag{3.77}$$

と与えられる．ここで

$$\Sigma=r^2+a^2\cos^2\theta, \tag{3.78}$$

$$\Delta=r^2+a^2-2GMr/c^2 \tag{3.79}$$

である．M は質量の a は長さの次元を持つ定数．a の 1 次，$1/r$ のオーダーま

で残すと，この解の漸近的な振る舞いは

$$ds^2 \simeq -(1-2GM/c^2r)c^2dt^2 + (1+2GM/c^2r)dr^2 + (4GMa\sin^2\theta/rc^2)cdtd\phi + r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2) \tag{3.80}$$

となる．この振る舞いから M がブラックホールの質量であることが分かる．また後の考察から $J = Mac$ が角運動量になっていることが分かる（6.2 節参照）．

唯一性定理は言い方を変えると，質量 M と角運動量 J で特徴付けられる漸近的に平坦な 4 次元定常真空のブラックホール解はカー時空に限られる，ということになる．なお，高次元の場合この定理は成り立たない（3.3.1 節参照）．

この時空の構造を調べてみよう．計量をみると $\Delta(r) = 0$ となる r で g_{rr} が発散している．$M > a$ の場合，その根は二つ存在し

$$r_\pm = GM/c^2 \pm \sqrt{G^2M^2/c^4 - a^2} \tag{3.81}$$

である．そこでの発散は新しい座標を導入することで改善される．具体的には (t, ϕ) の替わりに，次に定義される新しい座標 (v, χ) を用いてみよう．

$$dv = dx^0 + \frac{r^2 + a^2}{\Delta}dr, \tag{3.82}$$

$$d\chi = d\phi + \frac{a}{\Delta}dr. \tag{3.83}$$

すると，計量は

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Sigma}dv^2 + 2dvdr - \frac{2a\sin^2\theta(r^a + a^2 - \Delta)}{\Sigma}dvd\chi - 2a\sin^2\theta d\chi dr + \Sigma d\theta^2 + \frac{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\chi^2 \tag{3.84}$$

となる．$r = r_+$ で発散する計量の成分は存在しない．シュバルツシルトの類推から $r = r_+$ が事象の地平面に対応している．

真の特異点の位置を特定するために，$R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$ を計算しておこう．すこし煩雑な計算ののち

$$R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{48(GM/c^2)^2(r^2 - a^2\cos^2\theta)(\Sigma^2 - 16a^2r^2\cos^2\theta)}{\Sigma^6}. \tag{3.85}$$

よって $\Sigma = 0$ のみが特異点であることが分かる．Σ の表式を見ると，$r^2 + a^2\cos^2\theta$ となっているため，$\Sigma = 0$ とするのはおかしいのではないかと思うかもしれない．これは r 座標が「原点」まで張れていないことに起因している．実際に，r を普通の動径座標と思うと $r \geq 0$ と思うかもしれないが，それが誤解なのである．なぜなら，例えば $r = 0$ で $g_{\theta\theta} = a^2\cos^2\theta$，$g_{\phi\phi} = a^2\sin^2\theta$ となるため，面積半径がゼロとなっていない．座標を取り替える必要がある．ブラックホール内部や特異点の構造の説明は本書では割愛する．ここで重要なことは，この特異点が $r = r_+$ よりも内側にあることである．従って，$r = r_+$ が

事象の地平面であることが分かれば，この特異点はブラックホールの中に閉じ込められていることになる．

シュバルツシルト時空と同様に，時空の構造を調べるために，光的測地線の振る舞いを考える．計量の形が複雑なので，簡単のため $\theta = 0$ 面上に限って調べてみよう．$\theta = 0$ 上の測地線は時空全体の測地線でもある．このような面を全測地的という．その一般論は 4.1 節に譲るとして，$\theta = 0$ 面が全測地的であることを示しておこう．座標を θ とそれ以外 $x^M = (x^0, r, \phi)$ に分けておく．すると測地線の方程式は今の場合

$$\ddot{\theta} + \Gamma^\theta_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + 2\Gamma^\theta_{M\theta}\dot{x}^M\dot{\theta} + \Gamma^\theta_{MN}\dot{x}^M\dot{x}^N = 0, \tag{3.86}$$

$$\ddot{x}^M + \Gamma^M_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + 2\Gamma^M_{\theta N}\dot{\theta}\dot{x}^N + \Gamma^M_{NK}\dot{x}^N\dot{x}^K = 0 \tag{3.87}$$

となる．「$\cdot$」は固有時間 τ 微分である．ここで $\Gamma^\theta_{MN} \propto \sin\theta\cos\theta$ となることに気が付くと，$\theta = 0$，$\pi/2$ で $\Gamma^\theta_{MN} = 0$ となり，第 1 番目の式で $\theta = 0$，$\pi/2$ の軌道は測地線の方程式を満足していることが分かる．このとき，第 2 番目の式は

$$\ddot{x}^M + \Gamma^M_{NK}\dot{x}^N\dot{x}^K = 0 \tag{3.88}$$

となる．ここで Γ^M_{NK} は $\theta = 0, \pi/2$ 面上の計量だけで書かれている，即ち g^{MN} を g_{MN} の逆行列としたとき

$$\Gamma^M_{NK} = \frac{1}{2}g^{ML}(\partial_N g_{LK} + \partial_K g_{LN} - \partial_L g_{NK}) \tag{3.89}$$

となっているため，式 (3.88) は $\theta = 0$，$\pi/2$ 面上の測地線の方程式になっているのである．つまり，$\theta = 0$，$\pi/2$ 上の測地線は時空全体の測地線であることが分かった．ここでは $\theta = 0$ 上でだけ考えよう．このとき計量は

$$ds^2|_{\theta=0} = -\frac{\Delta}{\Sigma_0}dt^2 + \frac{\Sigma_0}{\Delta}dr^2 \tag{3.90}$$

となる．ここで $\Sigma_0 = r^2 + a^2$．$\Delta = (r - r_+)(r - r_-)$ であるから，前小節のライシュナーノルドシュトロームと同様の時空構造を持つ．特に $r = r_+$ が事象の地平面であることが光的測地線を用いて座標を張ることで分かる．

無限遠方の観測者にとって，t は自然な時間座標である．このベクトル $\xi = \partial_t$ は遠方では時間的なベクトルになっているため，確かに時間方向に進んでいる．さて，その大きさは

$$g_{ab}\xi^a\xi^b = g_{tt} \tag{3.91}$$

で与えれられるが，ξ^a が時間的なベクトルから空間的になる面が存在する．その面は $g_{tt} = 0$，即ち

$$\Delta - a^2\sin^2\theta = 0 \tag{3.92}$$

を満たす r の解

$$r_e = GM/c^2 + \sqrt{G^2M^2/c^4 - a^2\cos^2\theta} \geq r_+ \tag{3.93}$$

に存在する．事象の地平面の外に $g_{tt} > 0$ となる領域が広がっている．そして，領域 $(r_+ \leq r \leq r_e)$ で ξ^a は空間的ベクトルとなってしまう．この領域を**エルゴ領域**，$r = r_e$ の面を**エルゴ面**と呼ぶ．時間座標が空間座標となっているのである．例えば，粒子の運動を考えると，遠方でエネルギーと思っていたものがエルゴ領域内では運動量となる．そのおかげでブラックホールの角運動量を抜き出して，遠方でエネルギーに転換することが可能である（ペンローズ過程/超放射）．詳細は割愛する．

3.2 宇宙論的解

本節も時空の次元は 4 とする．

3.2.1 一様等方宇宙

様々な宇宙論的な解が存在するが，ここでは一様等方なものに焦点を絞る．この場合，計量は

$$d\ell^2 = {}^{(3)}g_{ij}dx^idx^j = a^2\left(\frac{1}{1-Kr^2}dr^2 + r^2\sigma_{AB}dx^Adx^B\right) \tag{3.94}$$

と書ける．ここで K, a は定数である．リーマンテンソルは

$${}^{(3)}R_{ijkl} = \frac{K}{a^2}({}^{(3)}g_{ik}{}^{(3)}g_{jl} - {}^{(3)}g_{il}{}^{(3)}g_{jk}) \tag{3.95}$$

と書けていることに注意する．

いま

$$r = \frac{1}{\sqrt{-K}}\sinh(\sqrt{-K}\chi) \tag{3.96}$$

で定義される新しい座標 χ を導入しよう．すると，空間計量は

$$d\ell^2 = \gamma_{ij}dx^idx^j = \begin{cases} a^2(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega_2^2) & K=1 \quad \text{3 次元球面} \\ a^2(d\chi^2 + \chi^2 d\Omega_2^2) & K=0 \quad \text{3 次元平面} \\ a^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi d\Omega_2^2) & K=-1 \quad \text{3 次元双曲面} \end{cases}$$

となる．

次に時空の計量の構成を考えよう．時間が経っても一様等方に見えるように時間軸をとる必要がある．そのために時間方向を空間と「直交」するようにとる．即ち

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\gamma_{ij}dx^idx^j \tag{3.97}$$

としてみよう．先ほどまで a は定数であったが，時間に依存してもよい．この

$a(t)$ は各時刻での宇宙の「サイズ」を表しており，スケール因子と呼ばれている．これはフリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー (FLRW) 計量と呼ばれている[*3]．なお，時間方向の単位ベクトルを $n^a = c^{-1}(\partial_t)^a = (\partial_{x^0})^a$，観測者の速度ベクトルを $u^a = (\partial_t)^a$ と書くと，$u^\mu = cn^\mu$ の関係がある．

宇宙には物質が満ち満ちている．物質は完全流体で近似できるとして，エネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + Pq_{\mu\nu} \tag{3.98}$$

で与えられる．ρc^2, P はエネルギー密度と圧力であり，それらは微視的物理から統計熱力学的に求められる．特にそれらの間の関係 $P = P(\rho)$ を状態方程式と呼ぶ．ここで $q_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ であり，このテンソルは空間成分のみ持つことが $q_{\mu\nu}n^\mu = 0$ であることから分かる．エネルギー・運動量テンソルのゼロでない値を持つ成分は

$$T_{00} = T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = \rho c^2, \tag{3.99}$$

$$T_{ij} = Pg_{ij} \tag{3.100}$$

である．

以上で準備が整った．ここでは宇宙項を含んだアインシュタイン方程式を考える．

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{3.101}$$

まずはクリストッフェル記号のゼロでない成分は

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{c}a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad \Gamma^i_{0j} = \frac{1}{c}\frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j, \quad \Gamma^i_{jk} = {}^{(\gamma)}\Gamma^i_{jk} \tag{3.102}$$

である．ここで ${}^{(\gamma)}\Gamma^i_{jk}$ は γ_{ij} に対するクリストッフェル記号で

$${}^{(\gamma)}\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\partial_j\gamma_{lk} + \partial_k\gamma_{lj} - \partial_l\gamma_{jk}). \tag{3.103}$$

その他の成分はゼロである．次にリッチテンソルは

$$R_{00} = -\partial_0\Gamma^i_{0i} - \Gamma^i_{j0}\Gamma^j_{0i} = -\frac{3}{c^2}\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right], \tag{3.104}$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= {}^{(\gamma)}R_{ij} + \partial_0\Gamma^0_{ij} - \Gamma^0_{kj}\Gamma^k_{i0} + \Gamma^k_{0k}\Gamma^0_{ij} - \Gamma^k_{0j}\Gamma^0_{ik} \\ &= \left\{\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] + \frac{2K}{a^2}\right\}{}^{(3)}g_{ij}, \end{aligned}$$

$$R_{0i} = 0 \tag{3.105}$$

[*3] ジョルジュ・ルメートルはカトリック司祭であったため，己の成果を誇示するようなことはなかった．宇宙の膨張の発見はハッブルと言われているが，それに先んじてルメートルが発見している．競争が奨励されている今日，研究資金調達のこともありこのような姿勢を保つことがますます困難となってきている．謙虚な人ほど損をする時代である．それでも人間は自然に対して謙虚であるべきと思う．

となる．リッチスカラーは

$$R=\frac{6}{c^2}\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot}+2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]+\frac{6K}{a^2} \tag{3.106}$$

となる．以上より

$$G_{00}=R_{00}+\frac{1}{2}R=\frac{3}{c^2}\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{Kc^2}{a^2}\right], \tag{3.107}$$

$$G_{ij}=R_{ij}-\frac{1}{2}{}^{(3)}g_{ij}R=-\frac{1}{c^2}\left[2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot}+3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{Kc^2}{a^2}\right]{}^{(3)}g_{ij} \tag{3.108}$$

となって，アインシュタイン方程式は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{Kc^2}{a^2}=\frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{\Lambda c^2}{3}, \tag{3.109}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{Kc^2}{a^2}\right]=-\frac{4\pi G}{c^2}P+\frac{1}{2}\Lambda c^2 \tag{3.110}$$

となる．これらは**フリードマン方程式**と呼ばれている．ここで第 1 式にスケール因子 a の時間に関する 2 階微分がないことに注意されたし．これは運動方程式ではなく，解析力学でいうところの拘束条件となっており，初期条件に関する条件式と見なされる．

次に式 (3.109) を (3.110) に代入し，スケール因子の時間に関する 1 階微分を消去すると，スケール因子の時間に関する 2 階微分の振る舞いが物質や宇宙項から読み取れるようになる．

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2+3P)+\frac{\Lambda c^2}{3}. \tag{3.111}$$

例えば宇宙項がなく ($\Lambda=0$)，エネルギー密度も圧力も非負である場合 ($\rho\geq 0$, $P\geq 0$)，右辺は負の値をとり，宇宙は必ず減速膨張することが分かる ($\ddot{a}\leq 0$)．現在の観測に従えば，宇宙は加速膨張していることがわかっており，概ね正の宇宙項によって説明される．

さて，これまで時空の運動方程式だけに注目してきたが，物質に対する運動方程式をみてゆこう．保存則 $\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$ からも導出できるが，これと同等の縮約されたビアンキ恒等式 $\nabla_\mu G^{\mu\nu}=0$ からも導出できる．そこで式 (3.109) の両辺の時間微分をとり，式 (3.110) を用いて 2 階微分を消去する．最終的に物質に関する保存則

$$\dot{\rho}+3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho+\frac{P}{c^2}\right)=0 \tag{3.112}$$

を得る．繰り返しになるが，これは $\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$ からも導出できる．実際に

$$\begin{aligned}0=\nabla_\mu T^{\mu 0}&=\partial_0 T^{00}+\Gamma^\mu_{\mu 0}T^{00}+\Gamma^0_{ij}T^{ij}\\&=c\left(\dot{\rho}+3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho+\frac{P}{c^2}\right)\right)\end{aligned} \tag{3.113}$$

となっている．この式はこのままでは解けないが，微視的な物理を通じて（量子）統計熱力学的に決まる状態方程式

$$P = P(\rho) \tag{3.114}$$

と合わせれば，式 (3.109), (3.110), (3.112), (3.114) で方程式系は閉じることになり，解を求めることができる．

具体的に解を求める前に，圧力が無視できる場合（ダスト優勢）に限って定性的な解の振る舞いについて調べてみよう．まず，保存則（式 (3.112)）から

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3} \tag{3.115}$$

となる．体積が a^3 に比例していることを考えると，密度が体積に反比例しているという直観と合致している．これを式 (3.109) に代入し，$a(t)$ を質点の位置座標と見立てると単位質量あたりのエネルギー方程式

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 + V(a) = -\frac{1}{2}Kc^2 \tag{3.116}$$

に変形できる．ここで $V(a)$ はポテンシャルエネルギーで

$$V(a) = -\frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a} - \frac{\Lambda c^2}{6}a^2 \tag{3.117}$$

である．この「質点」の運動はポテンシャルを図示するとおおよそ分かる（図 3.3 参照）．$K = 1$ の場合，ρ_0, Λ の値を調整することによって，ポテンシャル $V(a)$ の最大値にとどまる解が存在することが分かる（**アインシュタインの静的宇宙**）．また，$K = 0, -1$ の宇宙は $a = 0$ から始まったと考えられる．そこではエネルギー密度が発散しているため，時空の特異点となっている．宇宙は特異点から始まったことになる．

最後に簡単な具体例として，$\Lambda = K = 0$ で状態方程式が $P = w\rho c^2$ で与えられる場合を考えよう．$w \neq -1$ は定数．このとき保存則は

$$\dot{\rho} + 3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \tag{3.118}$$

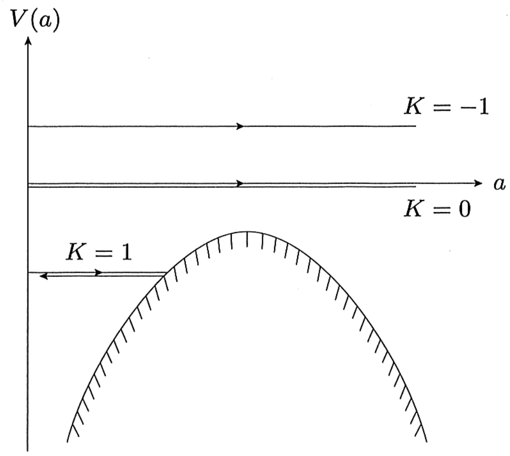


図 3.3　$V(a)$ の様子．$K = 1$ の場合は，膨張していた宇宙がやがて収縮に転じる場合がある．$K = 0, -1$ の場合は膨張しつづける．ここで $\Lambda > 0$ としている．

となるから，容易に積分できて

$$a = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \tag{3.119}$$

となる．ここで $t_0 = 1/(1+w)\sqrt{6\pi G\rho_0}$ である．$w > 0$ の場合，確かにスケール因子は減速膨張を示している．

3.2.2　ド・ジッター時空

エネルギー密度と圧力はなく正の宇宙項だけがある場合を考えてみよう．このとき式 (3.109) は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} =: \frac{c^2}{\ell^2} \tag{3.120}$$

となる．ここで長さの次元を持つ量 ℓ を導入した．この方程式の解は簡単に求まり

$$a(t) = \begin{cases} \ell\cosh(ct/\ell) & K=1 \quad 3\text{次元球面} \\ a_0 e^{ct/\ell} & K=0 \quad 3\text{次元平面} \\ \ell\sinh(ct/\ell) & K=-1 \quad 3\text{次元双曲面} \end{cases}$$

となる．各 K の値に応じて一見異なる時空のように見えるが，実はどれもド・ジッター時空と呼ばれる同じ時空の異なる座標による表現になっている．これをみるために，1 次元高い空間に埋め込んでみよう．

埋め込み先として 5 次元ミンコフスキー時空

$$ds_5^2 = -dT^2 + dW^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \tag{3.121}$$

を考える．その中の擬球面

$$-T^2 + W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = \ell^2 \tag{3.122}$$

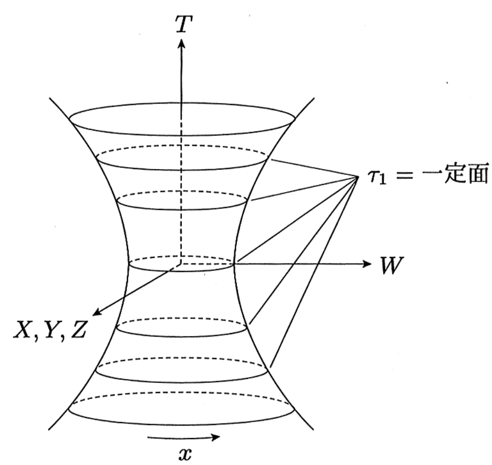


図 3.4　ド・ジッター時空．完全チャートは時空全体を覆っている．

がド・ジッター時空である（図 3.4 参照）．図中では双曲面のようになる．この擬球面上の座標の張り方にいろいろある．式 (3.122) を満たすものとしてまず

$$
\begin{aligned}
T &= \ell \sinh \tau_1 \\
W &= \ell \cosh \tau_1 \cos \chi \\
X &= \ell \cosh \tau_1 \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\
Y &= \ell \cosh \tau_1 \sin \chi \sin \theta \sin \phi \\
Z &= \ell \cosh \tau_1 \sin \chi \cos \theta
\end{aligned}
\tag{3.123}
$$

を考えてみよう．これを式 (3.121) に代入して整理すると

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \ell^2[-d\tau_1^2 + \cosh^2 \tau_1 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_2^2)] \\
&= -c^2 dt^2 + \ell^2 \cosh^2 (ct/\ell) d\Omega_3^2
\end{aligned}
\tag{3.124}
$$

となる．ここで $\tau_1 = ct/\ell$ とし，$d\Omega_3^2$ は単位 3 次元球面の微小面積要素である．この計量はまさに $K = 1$ の場合の解と同じである．図にあるようにこの座標は時空全体を覆っており，この座標系は完全チャートと呼ばれている．

次に式 (3.122) を満たすものとして

$$
\begin{aligned}
T + W &= \ell e^{\tau_2} \\
X &= \ell e^{\tau_2} \chi \sin \theta \cos \phi \\
Y &= \ell e^{\tau_2} \chi \sin \theta \sin \phi \\
Z &= \ell e^{\tau_2} \chi \cos \theta
\end{aligned}
\tag{3.125}
$$

を考えよう．すると式 (3.121) に代入した結果

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \ell^2[-d\tau_2^2 + e^{2\tau_2} (d\chi^2 + \chi^2 d\Omega_2^2)] \\
&= -c^2 dt^2 + \ell^2 e^{2ct/\ell} (d\chi^2 + \chi^2 d\Omega_2^2)
\end{aligned}
\tag{3.126}
$$

となる．ここで $\tau_2 = ct/\ell$ とした．この計量の形は $K = 0$ の場合となっている．これは図 3.5 のようにド・ジッター時空の斜め半分を覆っていることが分かる．時間一定面が平坦であることから平坦チャートと呼ばれている．

更に

$$
\begin{aligned}
T &= \ell \sinh \tau_3 \cosh \chi \\
W &= \ell \cosh \tau_3 \\
X &= \ell \sinh \tau_3 \sinh \chi \sin \theta \cos \phi \\
Y &= \ell \sinh \tau_3 \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \\
Z &= \ell \sinh \tau_3 \sinh \chi \cos \theta
\end{aligned}
\tag{3.127}
$$

を式 (3.121) に代入すると

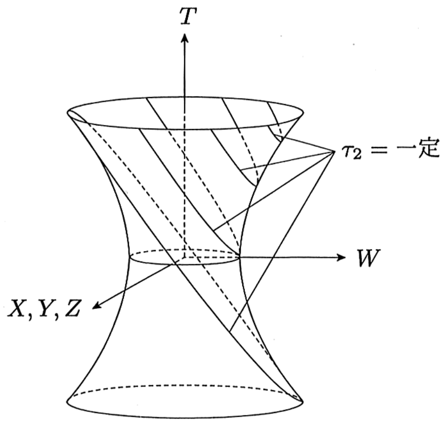


図 3.5　ド・ジッター時空．平坦チャートは半分を覆っている．

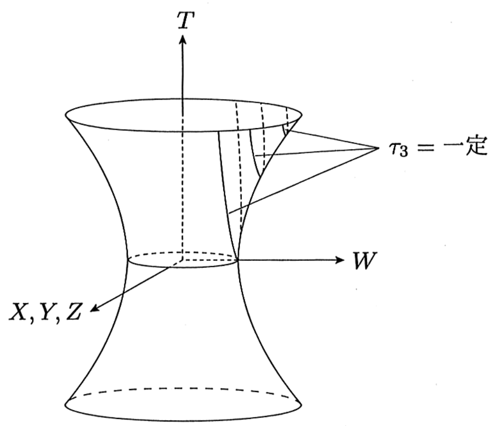


図 3.6　開チャートでのド・ジッター時空．

$$\begin{aligned} ds^2 &= \ell^2[-d\tau_3^2 + \sinh^2\tau_3(d\chi^2 + \sinh^2\chi d\Omega_2^2)] \\ &= -c^2dt^2 + \ell^2\sinh^2(ct/\ell)(d\chi^2 + \sinh^2\chi d\Omega_2^2) \end{aligned} \tag{3.128}$$

となる．ここで $\tau_3 = ct/\ell$ とした．これは $K = -1$ の場合の解と一致している．

以上より一見異なる形の計量はいずれも同じド・ジッター時空を表していることが分かった．

最後に静的チャートの表現も書いておこう．そのために

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\ell^2 - r^2}\sinh(ct/\ell) \\ W &= \sqrt{\ell^2 - r^2}\cosh(ct/\ell) \\ X &= r\sin\theta\cos\phi \\ Y &= r\sin\theta\sin\phi \\ Z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{3.129}$$

と置く．このとき計量は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{\ell^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \tag{3.130}$$

となる．$r < \ell$ では $1 - r^2/\ell^2 > 0$ はであるから，t は時間座標として意味があるが，$r = \ell$ で光的となり，$r > \ell$ では空間的座標となっている．

ドジッター時空は真空のエネルギーによって宇宙初期において起きたと考えられているインフレーション宇宙を近似的に表現している．

3.2.3 反ド・ジッター解

宇宙項が負の場合の真空解を考える．このときフリードマン方程式は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} = -\frac{c^2}{\ell^2}. \tag{3.131}$$

この式から明らかなように $K = 0, 1$ の場合，解が存在しない．$K = -1$ のときのみ存在して

$$a(\tau) = \ell \sin(ct/\ell). \tag{3.132}$$

この負の宇宙項を持つ時空は，ド・ジッター時空と同様に 1 次元高い空間に埋め込んで考えると見通しがよい．その 5 次元空間の計量は

$$ds^2 = -dT^2 - dW^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \tag{3.133}$$

で与えられ，その空間の中の擬球面

$$-T^2 - W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = -\ell^2 \tag{3.134}$$

が反ドジッター時空である．式 (3.132) の解は

$$\begin{aligned}
T &= \ell \sin\left(\frac{ct}{\ell}\right)\cosh\chi \\
W &= \ell \cos\left(\frac{ct}{\ell}\right) \\
X &= \ell \sin\left(\frac{ct}{\ell}\right)\sinh\chi \sin\theta\cos\phi \\
Y &= \ell \sin\left(\frac{ct}{\ell}\right)\sinh\chi \sin\theta\cos\phi \\
Z &= \ell \sin\left(\frac{ct}{\ell}\right)\sinh\chi \cos\theta
\end{aligned} \tag{3.135}$$

とすれば得られる．

静的チャートは

$$\begin{aligned}
T &= \sqrt{r^2 + \ell^2}\sin(ct_1/\ell) \\
W &= \sqrt{r^2 + \ell^2}\cos(ct_1/\ell) \\
X &= r\sin\theta\cos\phi \\
Y &= r\sin\theta\sin\phi \\
Z &= r\cos\theta
\end{aligned} \tag{3.136}$$

を，式 (3.133) に代入することによって

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)c^2dt_1^2 + \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_2^2 \tag{3.137}$$

と得られる．ここでさらに $r = \ell \sinh\rho$ によって新しい座標 ρ を導入すると，計量は

$$ds^2 = -\cosh^2\rho c^2dt_1^2 + d\rho^2 + \ell^2\sinh^2\rho\Omega_2^2 \tag{3.138}$$

とも書かれる．

ポアンカレチャートと呼ばれる座標系もしばしば用いられる．それには

$$T = \frac{1}{2u}\Bigl(1 + u^2(\ell^2 + x^2 + y^2 - c^2t_2^2)\Bigr)$$
$$W = \ell uct_2$$
$$X = \ell ux$$
$$Y = \ell uy$$
$$Z = \frac{1}{2u}\Bigl(1 + u^2(-\ell^2 + x^2 + y^2 - c^2t_2^2)\Bigr)$$

ととり，計量は

$$ds^2 = \ell^2\Bigl(\frac{du^2}{u^2} + u^2(-c^2dt_2^2 + dx^2 + dy^2)\Bigr) \tag{3.139}$$

となる．この座標系は任意の D 次元反ド・ジッター時空でも可能である．$dx^2 + dy^2 \to dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_{D-2}^2$ とすればよい．すると，$u=$ 一定面上の計量は平坦な $D-1$ 次元時空の計量となっている．このような負の宇宙項を持つ時空を 4 次元時空で考察することは稀であるが，高次元時空においては頻繁に議論されている．その応用例については 5.4 節を参照されたい．

3.3 高次元時空における厳密解

この節では高次元時空の簡単な解をいくつか導出しておこう．高次元時空において解のバラエティーはさらに豊富である．応用先が高エネルギー現象であるため本節では $c = 1$ の次元を採用する．

3.3.1 高次元ブラックホール解

ここでは静的高次元ブラックホール解を調べよう．広い応用を考えて宇宙項を含んだ帯電したものを考える．作用は

$$S = \frac{1}{16\pi G_D}\int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^Dx - \frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^Dx. \tag{3.140}$$

ここで D は時空全体の次元，G_D は D 次元の重力定数である．アインシュタイン方程式は 4 次元と変わらず

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_D\Big(F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Big) - \Lambda g_{\mu\nu} \tag{3.141}$$

である．これをすこし書き直すと

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G_D\Big(F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{2(D-2)}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Big) + \frac{2}{D-2}\Lambda g_{\mu\nu} =: \mathcal{T}_{\mu\nu} \tag{3.142}$$

となる．

さて静的な時空計量を

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2\sigma_{AB}dx^A dx^B \tag{3.143}$$

と書くことにしよう．ここで σ_{AB} は r, t には依存しないものとし，当面任意の計量としておく．4 次元では 2 次元単位球面の計量としてきた．しかし，実は高次元では漸近的に平坦な時空に制限しなければ解の可能性が広がることがあとで分かる．そこでアインシュタイン方程式からどのような制限が課されるか見ながら解を求めていくことにしよう．ベクトルポテンシャルは

$$A_\mu dx^\mu = -\phi(r)dx^0. \tag{3.144}$$

これらの仮定下で式 (3.142) の右辺は

$$\mathcal{T}_0^0 = \mathcal{T}_r^r = -8\frac{D-3}{D-2}\pi G_D\frac{\phi'^2}{fh} + \frac{2}{D-2}\Lambda, \tag{3.145}$$

$$\mathcal{T}_B^A = \Big(\frac{8}{D-2}\pi G_D\frac{\phi'^2}{fh} + \frac{2}{D-2}\Lambda\Big)\delta_B^A \tag{3.146}$$

となる．結局，アインシュタイン方程式は

$$\begin{aligned} R_0^0 &= -\frac{1}{2\sqrt{fh}}\Big(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\Big)' - \frac{(D-2)f'}{rfh} \\ &= -8\frac{D-3}{D-2}\pi G_D\frac{\phi'^2}{fh} + \frac{2}{D-2}\Lambda, \end{aligned} \tag{3.147}$$

$$\begin{aligned} R_r^r &= -\frac{1}{2\sqrt{fh}}\Big(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\Big)' + \frac{(D-2)h'}{rh^2} \\ &= -8\frac{D-3}{D-2}\pi G_D\frac{\phi'^2}{fh} + \frac{2}{D-2}\Lambda, \end{aligned} \tag{3.148}$$

$$\begin{aligned} R_B^A &= \frac{1}{r^2}{}^{(D-2)}R_B^A + \Big[-(D-3)\frac{1}{r^2h} - \frac{f'}{2rfh} + \frac{h'}{2rh^2}\Big]\delta_B^A \\ &= \Big[\frac{8\pi G_D}{D-2}\frac{\phi'^2}{fh} + \frac{2}{D-2}\Lambda\Big]\delta_B^A \end{aligned} \tag{3.149}$$

となる．ここで第 3 式の右辺第 1 項の ${}^{(D-2)}R_B^A$ は σ_{AB} のリッチテンソル ${}^{(D-2)}R^{AB}$ を σ^{AB} で添字を上げたもの ${}^{(D-2)}R_B^A = \sigma^{AC\,(D-2)}R_{CB}$ である．第 1 式と 2 式の両辺を引くと

$$\frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} = 0 \tag{3.150}$$

が得られる．よって，4次元とまったく同じく

$$h(r) = f^{-1}(r) \tag{3.151}$$

が導かれる．

ここでマクスウェル方程式

$$\nabla_\mu F^\mu_{\ 0} = f\left(F'_{r0} + \frac{D-2}{r}F_{r0}\right) = -f\left(\phi'' + \frac{D-2}{r}\phi'\right) = 0 \tag{3.152}$$

から，ϕ は

$$\phi = \frac{q}{r^{D-3}} \tag{3.153}$$

と簡単に解ける．

さて，残りのアインシュタイン方程式の第3式 (3.149) に注目しよう．この式で k を定数とし

$$^{(D-2)}R_{AB} = (D-3)k\sigma_{AB} \tag{3.154}$$

が成り立っていれば，すべて δ^A_B でくくり出せて，式 (3.153) と (3.151) を代入すると一つの方程式

$$(D-3)\frac{k-f}{r^2} - \frac{f'}{r} = \frac{8(D-3)^2}{D-2}\pi G_D \frac{q^2}{r^{2(D-2)}} + \frac{2}{D-2}\Lambda \tag{3.155}$$

を得る．式 (3.154) の意味はあとで考えることにしよう．さて，これをすこし整理すると

$$\begin{aligned}(r^{D-3}f)' = (D-3)kr^{D-4} - \frac{8(D-3)^2}{D-2}\pi G_D \frac{q^2}{r^{D-2}} \\ - \frac{2}{D-2}\Lambda r^{D-2}\end{aligned} \tag{3.156}$$

となる．これは簡単に積分できて

$$f(r) = k - \frac{2m}{r^{D-3}} + \frac{Q^2}{r^{2(D-3)}} - \frac{2}{(D-2)(D-1)}\Lambda r^2 \tag{3.157}$$

となる．m は積分定数で，ブラックホールの質量に比例している．$Q^2 = 8(D-3)\pi G_D q^2/(D-2)$ とした．これで解が求まった．$k=1$, $Q=0$, $\Lambda=0$ の場合が高次元シュバルツシルト解である*4．

式 (3.154) の意味を考えよう．この条件下でリーマンテンソルは

$$^{(D-2)}R_{ABCD} = k(\sigma_{AC}\sigma_{BD} - \sigma_{AD}\sigma_{BC}) + {}^{(D-2)}C_{ABCD} \tag{3.158}$$

となる．ワイルテンソルの自由度が残っている．ワイルテンソルがゼロの場合，σ_{AB} の空間は**極大対称空間**である．定数 k はここでは $1, 0, -1$ と規格しておくことにする．これは x^A の座標のスケールの任意性から常に可能である．ワイルテンソルがゼロの場合，この極大対称空間は k の値に応じて $D-2$ 次元球

*4 F. R. Tangherlini, Nuovo Cim. **27**, 636 (1963).

面 ($k=1$)，平面 ($k=0$)，双曲面 ($k=-1$) のいずれかになることが知られている．

1.4.8 節でみたように，$D=4$ 次元時空の場合，この空間は $D-2=2$ 次元であり，ワイルテンソルはない．また $D=5$ 次元の場合も 3 次元のワイルテンソルがゼロとなっていた．しかし，次元が $D \geq 6$ の場合，ワイルテンソルは非自明な値をとり得た．

$k=1$ で ${}^{(D-3)}C_{ABCD}=0$ の漸近的に平坦な静的ブラックホールの場合，高次元シュバルツシルト解の唯一性が証明できる (7.6.2 節参照)．しかし，回転している定常ブラックホールに対して，その唯一性は示すことができない．それどころか，同じ角運動量，質量を持つ異なる解が多数存在する．おそらく無限個存在する*5．4 次元と比べると，高次元時空の構造は豊かである．2012 年現在，その全容は明らかとなっていない*6．

3.3.2 カルツア・クライン泡

真空のブラックホール解から簡単に新しい正則な解を得る方法がある．ただし，時空の漸近構造が一般には大きく変更を受ける．具体的に 5 次元シュバルツシルト解を考えてみよう．式 (3.157) で $k=1$, $Q=0$, $\Lambda=0$ として

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega_2^2). \tag{3.159}$$

ここで都合上 $\mu^2 = 2m$ として

$$f(r) = 1 - \frac{\mu^2}{r^2} \tag{3.160}$$

と書くことにしよう．この解に次の二重ウイックローテーションを施そう．

$$t \to i\chi, \quad \theta \to i\tau + \pi/2. \tag{3.161}$$

この操作の下で得られた計量も真空のアインシュタイン方程式の解である．その結果得られる計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1-\mu^2/r^2)d\chi^2 + (1-\mu^2/r^2)^{-1}dr^2 \\ &\quad + r^2(-d\tau^2 + \cosh^2\tau d\Omega_2^2) \end{aligned} \tag{3.162}$$

である．この座標系では $r=\mu$ で一見特異な振る舞いをしている．そこで，

---

*5 カー時空の高次元版がマイヤーズとペリーによって発見されている [R. C. Myers and M. J. Perry, Annals Phys. **172**, 304 (1986).]．5 次元に限るが，その他多くの解が発見されている．その先駆けとなったのが 2002 年にエンパランとリアルによって発見されたブラックリング解である [R. Emparan and H. S. Reall, Phys. Rev. Lett. **88**, 101101 (2002)]．

*6 とはいうものの 2011 年までに明らかになったこともたくさんある [K. Maeda, T. Shiromizu, T. Tanaka(ed.), *Higher dimensional black holes*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **189**, 1 (2011); G. T. Horowitz(ed.), *Black Holes in Higher Dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge (2012)].

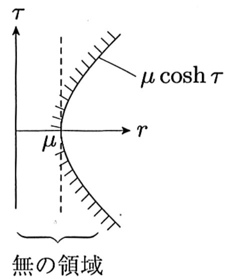


図 3.7　カルツア・クライン泡.

$r=\mu$ の周りで展開すると

$$ds^2 \simeq \frac{2(r-\mu)}{\mu}d\chi^2+\frac{\mu}{2(r-\mu)}dr^2+\mu^2(-d\tau^2+\cosh^2\tau d\Omega_2^2) \quad (3.163)$$

となる．g_{rr} の部分を正則にするために

$$r-\mu=\rho^2/2\mu \quad (3.164)$$

によって ρ を導入すると，計量は $\rho=0$ 近傍で

$$ds^2 \simeq d\rho^2+\rho^2 d(\chi/\mu)^2+\mu^2(-d\tau^2+\cosh^2\tau d\Omega_2^2) \quad (3.165)$$

となる．この表式を見ると $\rho=0$ の特異性は消えている．そして χ/μ の座標に周期 2π を持たせれば，$(\rho,\chi/\mu)$ 空間は局所的に極座標で書いた 2 次元平面になっている*7．$\rho=0$ はその面での原点である．従って，χ に周期 $\chi_p=2\pi\mu$ を持つ場合，解は $r\geq\mu$ $(\rho\geq 0)$ の時空全体は正則である．問題になるのが χ 方向をどう解釈するかである．周期化されてしまっているが普通の角度座標とは考えにくい．なぜなら $d\Omega_2^2$ に角度座標がすでに含まれているからである．この解にはどのような意味があるのであろうか．

すこし飛躍になるが，χ を余分な次元（余剰次元）の座標と考えることにしてみるとこの解に意味があることに気が付く．時間一定面の時空の構造は図のようになっている．5 次元全体では $r=\mu$ は正則であるが，$\chi=$ 一定面でみると有限の半径 $\mu\cosh\tau$ の球面で突然終わっている（$r\geq\mu$ で時空は定義されていることを思い出そう）．しかも，その面積は τ の増加に伴って限りなく増大する．半径 $\mu\cosh\tau$ 内に時空は存在しないため，無の泡と呼ばれている．この時空はカルツア・クライン泡と呼ばれている*8．

3.3.3　等方座標と多重ブラックホール解

静的球対称ブラックホール時空は一般に極座標から等方座標に変換することが可能である．静的球対称な時空の計量は

*7 χ/μ に周期性を課さない場合，$\rho=0$ にコニカル特異点が生じてしまう．

*8 ウィッテンによって発見された [E. Witten, Nucl. Phys. B **195**, 481 (1982)].

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2 \tag{3.166}$$

と書ける．ここで

$$ds^2 = -f(r = r(\rho))dt^2 + F(\rho)(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{D-2}^2) \tag{3.167}$$

を満足する新しい座標 ρ を導入してみる．$t=$ 一定面の計量は極座標で書かれた平坦空間の計量に比例していることに注意する．2 式を比較すると

$$h(r)^{1/2}dr = F^{1/2}(\rho)d\rho, \quad r = F^{1/2}\rho \tag{3.168}$$

が導かれる．2 番目の関係式を用いると，1 番目の式は

$$h^{1/2}dr/r = d\rho/\rho \tag{3.169}$$

となる．これが ρ と r の関係を与える．

具体的に高次元シュバルツシルト解を考えてみよう．上式は積分でき

$$r = \rho\left(1 + \frac{m}{2\rho^{D-3}}\right)^{\frac{2}{D-3}} \tag{3.170}$$

を得る．また，これを用いると計量は

$$ds^2 = -\left(\frac{1-\frac{m}{2\rho^{D-3}}}{1+\frac{m}{2\rho^{D-3}}}\right)^2 dt^2 + \left(1+\frac{m}{2\rho^{D-3}}\right)^{\frac{4}{D-3}}(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{D-2}^2) \tag{3.171}$$

となる．$t=$ 一定面の計量が極座標で書かれた平坦計量に比例していることに注意してほしい．

次に帯電したブラックホールを考えてみよう．その結果，座標変換は

$$r = \rho\left(1 + \frac{m}{\rho^{D-3}} + \frac{m^2-Q^2}{4\rho^{2(D-3)}}\right)^{\frac{1}{D-3}} \tag{3.172}$$

で与えられることが分かる．そしてこの座標を用いて計量は

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(\frac{1-\frac{m^2-Q^2}{\rho^{2(D-3)}}}{1+\frac{m}{\rho^{D-3}}+\frac{m^2-Q^2}{4\rho^{2(D-3)}}}\right)^2 dt^2 \\ &+ \left(1+\frac{m}{\rho^{D-3}}+\frac{m^2-Q^2}{4\rho^{2(D-3)}}\right)^{\frac{2}{D-3}}(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{D-2}^2) \end{aligned} \tag{3.173}$$

となる．ベクトルポテンシャルは

$$A_\mu dx^\mu = -\frac{q}{r^{D-3}}dt = -\frac{q}{\rho^{D-3}\left(1+\frac{m}{\rho^{D-3}}+\frac{m^2-Q^2}{4\rho^{2(D-3)}}\right)}dt. \tag{3.174}$$

ここで $m = |Q|$ の極限ブラックホールを考えよう．このとき計量とベクトルポテンシャルは簡単になり，

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1+\frac{m}{\rho^{D-3}}\right)^{-2} dt^2 \\ &+ \left(1+\frac{m}{\rho^{D-3}}\right)^{\frac{2}{D-3}}(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{D-2}^2) \end{aligned} \tag{3.175}$$

と

$$A_\mu dx^\mu \propto -\left(1 - \frac{1}{1+\frac{m}{\rho^{D-3}}}\right)dt. \tag{3.176}$$

この形を観察することで，新しい解の構成を試みてみよう．

まず，解が

$$\Delta u = 0 \tag{3.177}$$

を満足する一つの関数

$$u = 1 + \frac{m}{\rho^{D-3}} \tag{3.178}$$

で書けている点に注目する．ここで Δ は平坦空間 $d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_2^2$ のラプラシアンである．この方程式は線形であり，解の重ね合わせが可能になる．そのため新しい解の存在を予感させる[*9]．

そこで時空に球対称性を課す代わりに計量とベクトルポテンシャルに

$$ds^2 = -U^{-2}(x^i)dt^2 + U^{\frac{2}{D-3}}(x^k)\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{3.179}$$

$$A_\mu dx^\mu = \alpha U^{-1} dt \tag{3.180}$$

の形を仮定し，アインシュタイン方程式を再び一から解いてみることにしてみよう．ここで δ_{ij} は平坦な空間の計量，α は定数で方程式が解を持つように決めることにする．今の場合，クリストッフェル記号は

$$\Gamma^0_{0i} = -U^{-1}\partial_i U, \quad \Gamma^i_{00} = -U^{-\frac{2}{D-3}-3}\partial_i U,$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{D-3}U^{-1}(\delta_{ij}\partial_k U + \delta_{ik}\partial_j U - \delta_{jk}\partial_i U) \tag{3.181}$$

と計算される．ここで平坦な計量についての添字の上下は区別する必要はないので，すべて下に付けることにする．

まずマクスウェル方程式を考える．簡単な計算の後，U に対して平坦な空間のラプラシアン Δ を用いて

$$\Delta U = 0 \tag{3.182}$$

となる．次にアインシュタイン方程式を考える．今の計量の形に対して

$$\begin{aligned} R_{00} &= -U^{-\frac{2}{D-3}-3}\Delta U + U^{-\frac{2}{D-3}-4}\delta_{ij}\partial_i U \partial_j U \\ &= 8\pi G_D \alpha^2 \frac{D-3}{D-2} U^{-\frac{2}{D-3}-4}\delta_{ij}\partial_i U \partial_j U, \end{aligned} \tag{3.183}$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= -\frac{1}{D-3}\delta_{ij}U^{-1}\Delta U \\ &\quad -\frac{D-2}{D-3}U^{-2}\left(\partial_i U \partial_j U - \frac{1}{D-2}\delta_{ij}\delta_{kl}\partial_k U \partial_l U\right) \\ &= -8\pi G_D \alpha^2 U^{-2}\left(\partial_i U \partial_j U - \frac{1}{D-2}\delta_{ij}\delta_{kl}\partial_k U \partial_l U\right) \end{aligned} \tag{3.184}$$

[*9] 式 (3.171) の形を見ると真空の場合でも同様のことが成り立っていそうに思える．しかし，現実はそうなっていない．興味のある方は各人で確認してほしい．

となる．これらの式を注意深く睨むと，定数 α を

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{8\pi G_D}\frac{D-2}{D-3}} \tag{3.185}$$

と選ぶと，上のアインシュタイン方程式は

$$\Delta U = 0 \tag{3.186}$$

の一つに帰着する．これはマクスウェル方程式から出てきたものと同じである．これは簡単に解けて

$$U = 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i|^{D-3}} \tag{3.187}$$

で与えられる．これが多重ブラックホール解である*10．$N = 1$ の場合が一つの帯電ブラックホール解の場合となっている．$D = 4$ の場合，マジュンダー・パパペトロウ解と呼ばれている*11．

ブラックホール間には重力により引力が働き，このような多重ブラックホールが静的な状態を保ったまま存在することはないように思われる．しかし，電荷がある場合斥力が作用し，ちょうど $m_i = |Q_i|$ と調整することで，力のつり合いの状態が実現できている．

本書では帯電ブラックホールを等方座標で一度書き下し，$m = |Q|$ と調整することで新しい解の可能性を探った．幾分手探りの手法であったが，この種の解を構成する系統的手法が存在する．$m = |Q|$ は大域的な保存量に対する条件であるが，これを満たす場合，キリングベクトルを拡張したキリングスピノールと呼ばれるものが存在することが知られている*12．このキリングスピノールと関連した対称性を用いることによって，ここで行ったような計量の形へ制限することができる．なお，このスピノールはボゾン粒子とフェルミ粒子を入れ替える超対称性を生成することが知られている．

3.4 共形図形

時空の大域的構造を調べるのに便利な共形図形（カーター・ペンローズ図とも呼ばれる）を説明しよう．時空に共形変換を施し，他の時空のコンパクトな領域に埋め込むことを考える（共形埋め込み）．共形変換とは

$$ds'^2 = \Omega^2 ds^2 \tag{3.188}$$

*10 5次元以上の場合，事象の地平面上で潮汐力が発散することが報告されているが，その意味するところは詳しくは2011年現在では分かっていない [G. N. Candlish and H. S. Reall, Class. Quant. Grav. **24**, 6025 (2007)].

*11 正の宇宙項を入れた厳密解も存在する [カスター・トラッシェン解，D. Kastor and J. H. Traschen, Phys. Rev. D **47**, 5370 (1993)]．この解は漸近的にドジッター時空におけるブラックホール合体を表す場合がある．

*12 G. W. Gibbons and C. M. Hull, Phys. Lett. B **109**, 190 (1982).

で与えられる．Ω はある適当な正の関数である．この共形変換で重要な点は光的な方向を保存することである．計量 ds^2 でみた光的ベクトルは計量 ds'^2 でも光的である．つまり因果構造の概観は保存することになる．

さて，共形変換を最大限利用して無限に広がった時空の大域的構造を理解するために，共形変換を利用し無限遠方を有限の領域に「移動」する．つまり，共形因子 Ω を無限遠方でゼロになるように上手に選ぶ．

簡単のためにミンコフスキー時空を考えよう．計量は

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \tag{3.189}$$

まず光方向の座標系

$$u = ct - r, \quad v = ct + r \tag{3.190}$$

を導入して

$$ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(v-u)^2 d\Omega_2^2. \tag{3.191}$$

最終的に有限領域で時空を表現するために

$$U = \tan^{-1} u, \quad V = \tan^{-1} v \tag{3.192}$$

を定義すると，計量は

$$ds^2 = \frac{1}{4\cos^2 U \cos^2 V}\left[-4dUdV + \sin^2(U-V)d\Omega_2^2\right] \tag{3.193}$$

となる．(U,V) の変域は当初の予定通り

$$-\pi/2 < U, \quad V < \pi/2 \tag{3.194}$$

とコンパクトである．なお，$v - u = 2r \geq 0$ であるので，$V \geq U$ の制限がある．さらに座標

$$T = V + U, \quad R = V - U \quad (0 \leq R \leq \pi, |T| + R < \pi) \tag{3.195}$$

を用いると，計量は

$$ds^2 = \frac{1}{(\cos T + \cos R)^2}[-dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega_2^2] \tag{3.196}$$

となる．ここで共形因子 Ω として

$$\Omega = 2\cos U \cos V = \cos T + \cos R \tag{3.197}$$

と選ぶと，共形変換後の時空の計量は

$$ds'^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega_2^2 \tag{3.198}$$

となる．これはアインシュタインの静的宇宙の計量そのものである．空間計量は 3 次元球面 S^3，即ち閉じた宇宙の計量であり，時間発展はない．この静的宇宙のコンパクトな領域にミンコフスキー時空が埋め込まれている（図 3.8 参

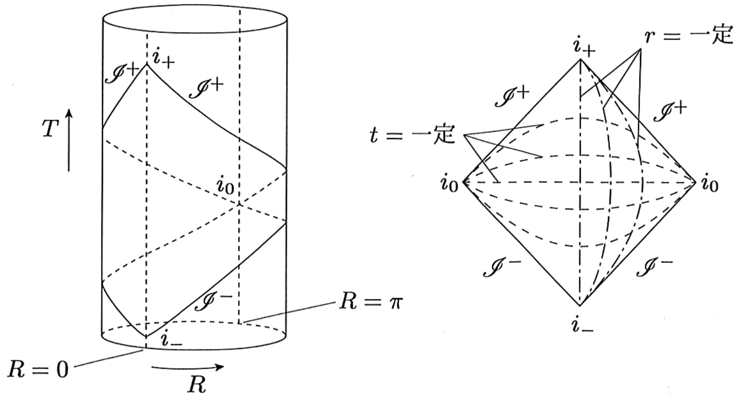


図 3.8　ミンコフスキー時空の静的宇宙への共形埋め込み．

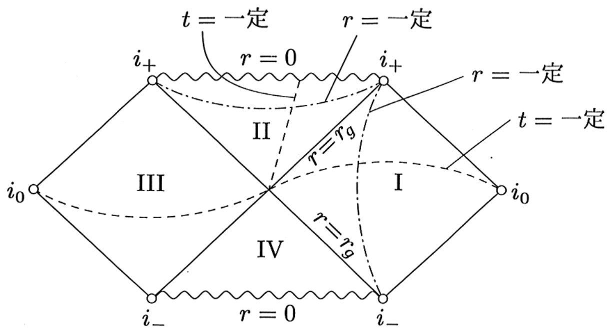


図 3.9　シュバルツシルト時空の共形図形．

照)．この埋め込まれたミンコフスキー時空には，3 つの無限遠方という境界が存在する．時間的無限遠方 $i_\pm$，空間的無限遠方 i_0（spi（スパイ）と呼ばれている)，光的無限遠方 $\mathscr{I}^\pm$（scri（スクライ）と呼ばれている*13）である．

一般の時空でも同様の手続きによって，時空を他の時空に共形的に埋め込むことによって，大域的時空の構造が理解される．漸近的に平坦なブラックホール時空のブラックホールからある程度離れた領域はミンコフスキー時空と同じになると期待されるため，具体的な共形因子を用意せずとも，おおよその図は書ける．例えばシュバルツシルト時空は図 3.9 のようになる．

*13 Script I の略．このように読めるかどうかが相対論屋の証の一つとなっている．

第 4 章
時空の分解

一般相対性理論では理論を共変的に構成している．しかし，力学がそうであるように，時空の運動を議論することがあるであろう．つまり初期位置，初速度を決めれば方程式によって粒子の運動が予測できるように，宇宙の「初期位置」，「初速度」を決めればアインシュタイン方程式から決定される様子を構築したい．そこでしばしば採用されるのが空間の時間発展という見方である[*1]．共変性は壊すことになるが，具体的な予言を行うためには必要なことである．このような時間方向に時空を輪切り（葉層化）にする考え方は，空間方向に行っても有用なことがしばしばある．本章では，この葉層化に関連する基本的な事項について解説を行う．本章では全面的にウォルトの抽象添字を採用する（1.6 節参照）．また $c=1$ とする．

4.1 超曲面，誘導計量，外的曲率

種々の応用を念頭において D 次元時空 (M,g) を考える．(M,g) は計量 g_{ab} で距離が記述されている時空 M を指す．次に $D-1$ 次元超曲面 Σ を考え，その単位法線ベクトルを n^a とする．

$$g_{ab}n^a n^b = \epsilon = \begin{cases} -1 & \text{時間的} \\ 1 & \text{空間的.} \end{cases}$$

次に超曲面 Σ 上の**誘導計量**を

$$q_{ab} = g_{ab} - \epsilon n_a n_b \tag{4.1}$$

によって導入する．この計量が n^a 方向の成分を持たないことは

$$q_{ab}n^b = (g_{ab} - \epsilon n_a n_b)n^b = n_a - \epsilon^2 n_a = 0 \tag{4.2}$$

[*1] ADM 形式と呼ばれる [R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, Phys. Rev. **116**, 1322 (1959).].

から分かる．この誘導計量を用いて時空 M 上のベクトル場 V^a から超曲面 Σ 上のベクトル場 $\tilde{V}^a$ を作ることができる．実際に

$$\tilde{V}^a := q^a_b V^b \tag{4.3}$$

とすればよい．ここで $q^b_a = q_{ac} g^{bc}$ である．このベクトルが n^a 方向成分を持たないことは

$$n_a \tilde{V}^a = n^a q^b_a V_b = 0 \tag{4.4}$$

となることで分かるであろう．ここで重要なのは q_{ab} が射影演算子の役割を果たしていることである．q_{ab} がフィルターの役割を果たし，n^a 方向のベクトルの成分を落としてくれている．

次に共変微分を考えよう．q_{ab} が射影演算子であると思うと

$$q^a_c q^d_b \nabla_d \tilde{V}^c =: D_b \tilde{V}^a \tag{4.5}$$

のように M 上の共変微分 ∇_a から Σ 上の共変微分 D_a を自然に導入できる．この D_a を誘導計量に作用させてみると

$$D_c q_{ab} = q^d_c q^e_a q^f_b \nabla_d q_{ef} = q^d_c q^e_a q^f_b \nabla_d (g_{ef} - \epsilon n_e n_f) = 0 \tag{4.6}$$

とゼロとなる．ここで $\nabla_c g_{ab} = 0$ を用いたが，この M 上の共変微分と計量との間で成り立つ性質が，Σ 上でも成り立っていることを上式は意味している．そして，Σ 上に座標 $\{x^i\}$ を張り，クリストッフェル記号 ${}^{(D-1)}\Gamma^i_{jk}$ を用いて式 (4.6) を座標表示すると

$$\partial_i q_{jk} - {}^{(D-1)}\Gamma^l_{ij} q_{lk} - {}^{(D-1)}\Gamma^l_{ik} q_{jl} = 0 \tag{4.7}$$

となるが，この式からクリストッフェル記号 ${}^{(D-1)}\Gamma^i_{jk}$ は

$${}^{(D-1)}\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} q^{il} (\partial_j q_{lk} + \partial_k q_{lj} - \partial_l q_{jk}) \tag{4.8}$$

と書けることが分かる．Σ 上の誘導計量 q_{ab} から作られたクリストッフェル記号となっている．

D 次元時空 M の幾何学量と $D-1$ 次元部分超曲面 Σ の幾何学量との間に重要な関係式（ガウス・コダッチ方程式）が存在する．その導出の前に外的曲率の導入を行う．

リーマンテンソルはその時空ないしは空間内部のみの概念で定義されていた．時空の曲がり具合は，そのなかに住んでいる人々が平行移動を行って調べることができる便利な量である．一方で，時空全体の中のある超曲面を考える場合，その曲面内のリーマンテンソルだけでなく，元の時空にどのように埋め込まれているか，という量が重要となってくる．そこで次の**外的曲率**と呼ばれる量 K_{ab} を定義する．

$$K_{ab} := q^c_a q^d_b \nabla_c n_d. \tag{4.9}$$

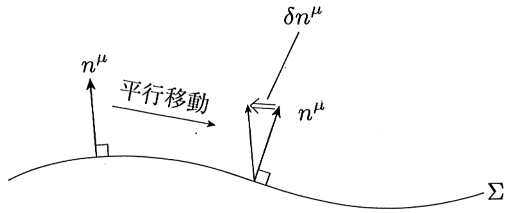


図 4.1　外的曲率の概念図．

n^a は Σ の単位法線ベクトルである．この量は n^a を Σ に沿って平行移動したものと単位法線ベクトルのずれの Σ への射影成分を表している（図 4.1）．

簡単のために計量が

$$ds^2 = \epsilon d\xi^2 + g_{ij}(\xi, x^k)dx^i dx^j \tag{4.10}$$

と与えられる場合の ξ ＝一定面の外的曲率についてみてみよう．$n_\mu = (\epsilon, 0, 0, 0, \cdots)$ であることを用いると外的曲率の成分は

$$K_{ij} = \nabla_i n_j = \partial_i n_j - \Gamma^{\xi}_{ij} n_\xi = \frac{1}{2}\partial_\xi g_{ij} \tag{4.11}$$

となる．外的曲率は空間計量の ξ 微分で与えられているのである．ξ 方向が時間方向であれば，g_{ij} を力学での「位置座標」，K_{ij} が「速度」に対応していることになる．

ここで**全測地的**という概念を導入しておこう．これは 3.1.4 節のカー時空の時空構造を解析する際に導入したものの一般化にあたる．単位法線ベクトル n^a を持つ超曲面 Σ を考えよう．このとき，Σ 上の測地線と時空全体の測地線との関係が気になる．そこで Σ 上の測地線が，時空全体の測地線となるための条件をみてみよう．Σ 上のベクトル t^a を時空全体の測地線の接ベクトルとしたとき，方程式

$$t^a \nabla_a t^b = 0 \tag{4.12}$$

が成り立つ．ここで左辺にクロネッカーのデルタを挟んで次のように書き直す．

$$\begin{aligned} t^a \delta^b_c \nabla_a t^c &= t^a (q^b_c + \epsilon n_c n^b) \nabla_a t^c \\ &= t^a q^b_c \nabla_a t^c + \epsilon t^a n^c n^b \nabla_a t_c \\ &= t^a q^b_c \nabla_a t^c - \epsilon t^a t^c n^b \nabla_a n_c \\ &= t^a D_a t^b - \epsilon n^b t^a t^c K_{ac}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

2 行目から 3 行目に移る際に $n^a t_a = 0$ である事実を使った．この関係式から明らかなように，$K_{ab} = 0$ であるとき Σ 上の測地線の方程式

$$t^a D_a t^b = 0 \tag{4.14}$$

が成り立つ．よって，ほしい条件は

$$K_{ab} = 0 \tag{4.15}$$

だったわけである．この条件を満たす曲面を**全測地的**であるという．

4.2 ガウス・コダッチ方程式

準備が整った．まずは結果から．**ガウス方程式**は

$${}^{(D-1)}R_{abcd} = q_a^e q_b^f q_c^g q_d^h {}^{(D)}R_{efgh} + \epsilon(K_{ac}K_{bd} - K_{bc}K_{ad}). \tag{4.16}$$

コダッチ方程式は

$$q_a^b n^{c(D)} R_{bc} = D_b K_a^b - D_a K. \tag{4.17}$$

これらをまとめてガウス・コダッチ方程式と呼ぶ．

以下でみるようにこれらの導出の際にアインシュタイン方程式は一切用いていない．従って，純粋に幾何学的に成り立つ関係式である．しかし，これらの関係式がどのようにアインシュタイン方程式と関わってくるのか関心がある．そこで式 (4.16) に $q^{ac}q^{bd}$ を作用させて縮約をとってみよう．すると

$${}^{(D-1)}R = {}^{(D)}R_{abcd}q^{ac}q^{bd} + \epsilon(K^2 - K_{ab}K^{ab}) \tag{4.18}$$

となる．さらに右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} {}^{(D)}R_{abcd}q^{ac}q^{bd} &= {}^{(D)}R_{abcd}(g^{ac} - \epsilon n^a n^c)(g^{bd} - \epsilon n^b n^d) \\ &= -2\epsilon\left({}^{(D)}R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}{}^{(D)}R\right)n^a n^b \end{aligned} \tag{4.19}$$

となる．ここでアインシュタイン方程式の左辺の項，即ちアインシュタインテンソルが登場していることに気が付くであろう．ここにアインシュタイン方程式

$$R_{ab} - (1/2)g_{ab}R = \kappa^2 T_{ab} \tag{4.20}$$

を使う．ここで $\kappa^2 = 8\pi G_D$ で，G_D は D 次元の重力定数である．すると

$$2^{(D)}G_{ab}n^a n^b = -\epsilon^{(D-1)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab} = 2\kappa^2 T_{ab}n^a n^b \tag{4.21}$$

となる．すこし周りくどい印象を与えたかもしれないが，つまるところ D 次元アインシュタイン方程式の n^a 方向の成分を $D-1$ 次元の幾何学量と外的曲率で書き下すのにガウス方程式を用いたのである．

同様にコダッチ方程式の左辺にアインシュタイン方程式を用いると

$$D_b K_a^b - D_a K = {}^{(D)}R_{bc}q_a^c n^b = \kappa^2 T_{bc}q_a^c n^b \tag{4.22}$$

となる．アインシュタイン方程式の n^a 方向とそれに垂直な方向の混合成分（非対角成分）を $D-1$ 次元の量と外的曲率で表現している．

まずガウス方程式の導出を行おう．V_a を Σ 上のベクトル場としよう．$D-1$ 次元のリーマンテンソルの定義から

$$(D_a D_b - D_b D_a) V_c = {}^{(D-1)}R_{abcd} V^d \tag{4.23}$$

である．そして左辺の $D-1$ 次元の共変微分を D 次元のものに書き換えることを考える．まず左辺の第 1 項は

$$\begin{aligned}
D_a D_b V_c &= q_a^f q_b^g q_c^h \nabla_f (q_g^d q_h^e \nabla_d V_e) \\
&= q_a^f q_b^g q_c^h \Big[q_g^d q_h^e \nabla_f \nabla_d V_e - \epsilon (\nabla_f n_g) n^d q_h^e \nabla_d V_e \\
&\qquad\qquad - \epsilon (\nabla_f n_h) n^e q_g^d \nabla_d V_e \Big] \\
&= q_a^f q_b^d q_c^e \nabla_f \nabla_d V_e - \epsilon K_{ab} n^d q_c^e \nabla_d V_e - \epsilon K_{ac} n^e q_b^d \nabla_d V_e \\
&= q_a^f q_b^d q_c^e \nabla_f \nabla_d V_e - \epsilon K_{ab} n^d q_c^e \nabla_d V_e + \epsilon K_{ac} K_b^e V_e
\end{aligned} \tag{4.24}$$

となる．3 行目から 4 行目に移る際に $n^e V_e = 0$ を用いた．この結果で添字 ab を反対称化すると式 (4.23) の左辺を計算したことになり，その結果ガウス方程式を得ることができる．

次にコダッチ方程式．今度は D 次元のリッチ，リーマンテンソルの定義に戻り

$$q_a^b n^{c\,(D)} R^d{}_{bdc} = q_a^b (\nabla^d \nabla_b - \nabla_b \nabla^d) n_d. \tag{4.25}$$

そして右辺の D 次元の共変微分を $D-1$ 次元共変微分に書き直すことを考える．そこでの一つの技は $g_{ab} = q_{ab} + \epsilon n_a n_b$ や $\delta_a^b = q_a^b + \epsilon n_a n^b$ を用いて，中間に挟んでいくことである．具体的には右辺第 1 項は

$$\begin{aligned}
q_a^b \nabla^d \nabla_b n_d &= q_a^b \nabla^d [\delta_b^c \delta_d^e \nabla_c n_e] \\
&= q_a^b \nabla^d \Big[(q_b^c + \epsilon n_b n^c)(q_d^e + \epsilon n_d n^e) \nabla_c n_e \Big] \\
&= q_a^b \nabla^d K_{bd} + \epsilon K_{ba} n^c \nabla_c n^b \\
&= q_a^b (q^{cd} + \epsilon n^c n^d) \nabla_d K_{bc} + \epsilon K_{ba} n^c \nabla_c n^b \\
&= D^b K_{ab} + \epsilon q_a^b n^c n^d \nabla_d K_{bc} + \epsilon K_{ba} n^c \nabla_c n^b \\
&= D^b K_{ab}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

となる．5 行目から 6 行目に移る際に $n^c K_{bc} = 0$ であることを用いた．5 行目の第 2 項と 3 項は相殺してゼロとなっている．一方で右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}
q_a^b \nabla_b \nabla^d n_d &= q_a^b \nabla_b (g^{de} \nabla_d n_e) \\
&= q_a^b \nabla_b \Big((q^{de} + \epsilon n^d n^e) \nabla_d n_e \Big) \\
&= q_a^b \nabla_b K \\
&= D_a K
\end{aligned} \tag{4.27}$$

となる．よってコダッチ方程式が得られた．

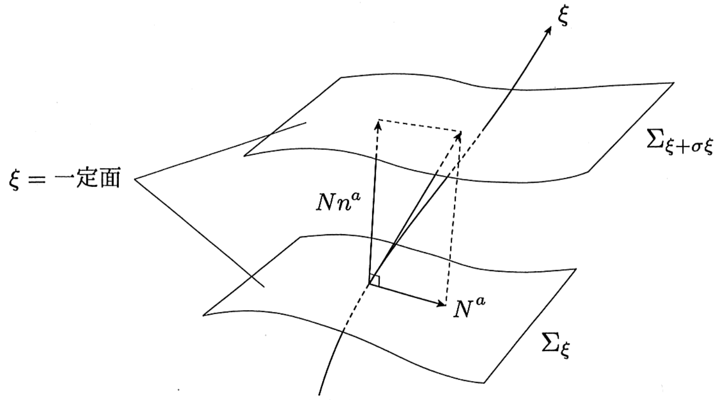


図 4.2　時空の分解.

4.3　発展方程式

前節の式 (4.21) と (4.22) には Σ 上の計量の ξ についての 1 階微分の項のみが含まれていることに気がついてほしい ($\epsilon=-1$ の場合，時間微分)．式 (4.21) の中の $^{(D-1)}R$ 内に ξ についての 2 階微分が含まれているのではないかと疑問に思う読者もいるかもしれない．しかし，その中には Σ 上の計量の 2 階微分が含まれているだけで，ξ についての 2 階微分は一つも含まれていない．ξ の 2 階微分は残りのアインシュタイン方程式の成分に含まれている．この成分の式を書き下す前に時空の分解を行っておこう．座標 (ξ, x^i) を用いて計量を

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \epsilon N^2 d\xi^2 + q_{ij}(dx^i + N^i d\xi)(dx^j + N^j d\xi) \tag{4.28}$$

と書く．ここで N は**ラプス関数**，$N^a = N^i(\partial_i)^a$ は**シフト関数**と呼ばれている (図 4.2)．q_{ij} は q_{ab} の座標成分で $q_{ij} = q_{ab}(\partial_i)^a(\partial_j)^b$．$\xi=$ 一定面の単位法線ベクトルは $n_a = \epsilon N\nabla_a\xi$ と書ける．あるいは $n^a = N^{-1}[(\partial_\xi)^a - N^a]$．

まず外的曲率がリー微分を用いて

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\pounds_n q_{ab} \tag{4.29}$$

と書けることを示そう．定義から

$$K_{ab} = q_a^c q_b^d \nabla_c n_d = q_a^c q_b^d \nabla_c(\epsilon N \nabla_d \xi) = \epsilon N q_a^c q_b^d \nabla_c \nabla_d \xi \tag{4.30}$$

となるため，$K_{ab} = K_{ba}$ が明らかに成り立っている．ここで $q_a^c\nabla_c\xi = 0$ であることを用いた．よって

$$K_{ab} = \frac{1}{2}q_a^c q_b^d(\nabla_c n_d + \nabla_d n_c) \tag{4.31}$$

と書くことができる．一方で

$$\begin{aligned}\pounds_n q_{ab} &= \pounds_n(g_{ab} - \epsilon n_a n_b) \\ &= \nabla_a n_b + \nabla_b n_a - \epsilon(\pounds_n n_a)n_b - \epsilon(\pounds_n n_b)n_a\end{aligned} \tag{4.32}$$

となるが，第 2, 3 項に対して

$$\pounds_n n_a = n^c\nabla_c n_a + n_c\nabla_a n^c = n^c\nabla_c n_a \tag{4.33}$$

を用いると

$$\begin{aligned}\pounds_n q_{ab} &= \nabla_a n_b + \nabla_b n_a - \epsilon(n^c\nabla_c n_a)n_b - \epsilon(n^c\nabla_c n_b)n_a \\ &= (\delta_a^c - \epsilon n^c n_a)\nabla_c n_b + (\delta_b^c - \epsilon n^c n_b)\nabla_c n_a \\ &= q_a^c\nabla_c n_b + q_b^c\nabla_c n_a \\ &= K_{ab} + K_{ba} = 2K_{ab}\end{aligned} \tag{4.34}$$

となるため，$K_{ab} = (1/2)\pounds_n q_{ab}$ が成り立つことが分かった．よって，q_{ab} を力学での「位置座標」に対応させることによって K_{ab} が「速度」に対応させることができる．

ではいよいよアインシュタイン方程式の残りの成分

$$^{(D)}G_{cd}q_a^c q_b^d = \kappa^2 T_{cd}q_a^c q_b^d \tag{4.35}$$

の分解を行おう．まず式 (4.16) のガウス方程式の両辺に q^{bd} を作用してみよう．すると

$$\begin{aligned}^{(D-1)}R_{ac} &= q_a^e q^{fh} q_c^{g\,(D)}R_{efgh} + \epsilon(K_{ac}K - K_{bc}K_a^b) \\ &= q_a^e q_c^{g\,(D)}R_{eg} - q_a^e q_c^g \epsilon n^f n^{h\,(D)}R_{efgh} \\ &\quad + \epsilon(K_{ac}K - K_{bc}K_a^b)\end{aligned} \tag{4.36}$$

となる．右辺の第 2 項をリーマンテンソルの定義に戻ってさらに詳しく式変形を行うと

$$\begin{aligned}q_a^e q_c^g n^f n^{h\,(D)}R_{efgh} &= {}^{(D)}R_{abcd}n^b n^d \\ &= n^b(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)n_c \\ &= \nabla_a(n^b\nabla_b n_c) - (\nabla_a n^b)(\nabla_b n_c) \\ &\quad - n^b\nabla_b\nabla_a n_c\end{aligned} \tag{4.37}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}\nabla_a n_b &= \delta_a^c\nabla_c n_b = (q_a^c + \epsilon n_a n^c)\nabla_c n_b \\ &= K_{ab} + \epsilon n_a n^c\nabla_c(\epsilon N\nabla_b\xi) \\ &= K_{ab} + n_a n^c(\nabla_c N)\nabla_b\xi + N n_a n^c\nabla_c\nabla_b\xi \\ &= K_{ab} + n_a n^c(\nabla_c N)\epsilon N^{-1}n_b + N n_a n^c\nabla_b\nabla_c\xi \\ &= K_{ab} + \epsilon n_a n^c n_b(\nabla_c \ln N) + N n_a n^c\nabla_b(\epsilon N^{-1}n_c) \\ &= K_{ab} + \epsilon n_a n^c n_b(\nabla_c \ln N) - n_a\nabla_b \ln N \\ &= K_{ab} - n_a(\delta_b^c - \epsilon n_b n^c)\nabla_c \ln N \\ &= K_{ab} - n_a D_b \ln N\end{aligned} \tag{4.38}$$

となることを用いると，式 (4.37) は

$$
\begin{aligned}
&q_a^e q_c^g n^f n^{h(D)} R_{efgh} \\
&= -\nabla_a(\epsilon D_c \ln N) - (K_a^b - n_a D^b \ln N)(K_{bc} - n_b D_c \ln N) \\
&\quad - n^b \nabla_b (K_{ac} - n_a D_c \ln N) \\
&= -\nabla_a(\epsilon D_c \ln N) - K_a^b K_{bc} + n_a K_{bc} D^b \ln N \\
&\quad - n^b \nabla_b K_{ac} - \epsilon D_a \ln N D_c \ln N + n^b n_a \nabla_b D_c \ln N \\
&= -\epsilon(\delta_a^b - \epsilon n_a n^b)(q_c^d + \epsilon n_c n^d)\nabla_b D_d \ln N - K_a^b K_{bc} \\
&\quad - \epsilon D_a \ln N D_c \ln N + n_a K_{bc} D^b \ln N - n^b \nabla_b K_{ac} \\
&= -\epsilon N^{-1} D_a D_c N - n^b \nabla_b K_{ac} - K_a^b K_{bc} \\
&\quad + n_a K_{bc} D^b \ln N + n_c K_{ba} D^b \ln N \\
&= -\epsilon N^{-1} D_a D_c N - \pounds_n K_{ac} + K_a^b K_{bc}
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

となる．最後の行で式 (4.38) とリー微分の定義を用いた．これを式 (4.36) に代入し，左辺に $\pounds_n K_{ac}$ を，右辺にそれ以外をもってくると

$$
\begin{aligned}
\pounds_n K_{ac} = 2K_{ab}K_c^b - KK_{ac} - \epsilon N^{-1} D_a D_c N + \epsilon\, {}^{(D-1)}R_{ac} \\
-\epsilon q_a^b q_c^{d\,(D)} R_{bd}
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

を得る．この導出までにアインシュタイン方程式は用いていないことに注意する．純粋に幾何学的に成り立つ式なのである．右辺の最後の項に D 次元アインシュタイン方程式を用いてエネルギー・運動量テンソルに書き直すと

$$
\begin{aligned}
\pounds_n K_{ab} = 2K_{ac}K_b^c - KK_{ab} - \epsilon N^{-1} D_a D_b N + \epsilon\, {}^{(D-1)}R_{ab} \\
-\epsilon\kappa^2\Big(q_a^c q_b^d T_{cd} - \frac{1}{D-2} q_{ab} T\Big)
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

となる．これがアインシュタイン方程式の残りの成分と考えることができる．この式の左辺は計量 q_{ab} の n^a 方向の 2 階微分を含む．ξ が時間方向なら時間についての 2 階微分である．これが発展方程式である．ここで，前小節で導いた式 (4.21) と (4.22) の構造を振り返ってみよう．それらには q_{ab} の n^a 方向微分は 1 階のみの項しか含まれていないことは述べた．従って，これらは運動を記述していないのである．各時刻（$\epsilon = -1$ の場合）における「速度」K_{ab} に対する制限を与えているだけである．また，時空の変数であったラプス関数 N の時間微分も入っていない．このような式は**拘束条件**と呼ばれる．拘束条件をまとめておくと[*2]

[*2] 一般的にはこれらの方程式は数値的に解く必要があるが，このままでは数値的誤差が指数関数的に増大しに不安定であることが分かっている．そこで，中村や柴田らに開発された新たに拘束条件を加え安定化する方法 (BSSN 形式 [T. Nakamura, Prog. Theor. Phys. Suppl. **90**, 1 (1987); M. Shibata, T. Nakamura, Phys. Rev. D **52**, 5428 (1995); T. W. Baumgarte, S. L. Shapiro, Phys. Rev. D **59**, 024007 (1999).]) がしばしば採用され，現在では安定に計算できるようになっている．

$$-\epsilon^{(D-1)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab} = 2\kappa^2 T_{ab}n^a n^b, \tag{4.42}$$

$$D_b K^b_a - D_a K = \kappa^2 T_{bc} q^c_a n^b. \tag{4.43}$$

拘束条件は初期面で満たされていれば，その後の発展で自動的に満たされていることはビアンキ恒等式（式 (1.90)）

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \tag{4.44}$$

から保証されている．

4.4 時空のハミルトニアン

本節では時空のハミルトニアンの構成を行おう．以後，次元は $D=4$ とし，時空の動的ダイナミクスを追うことを考え，法線ベクトルの向きを時間方向にとることにする．即ち，本節では

$$n^a n_a = \epsilon = -1 \tag{4.45}$$

とし，時間座標 t を使おう，即ち

$$\xi = t. \tag{4.46}$$

計量は

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^{+} N^j dt) \tag{4.47}$$

と書ける．この系における変数は

$$(q_{ij}, N, N^a) \tag{4.48}$$

である．

まず重力の作用関数の被積分関数であるリッチテンソルを $(3+1)$ 分解で導入した変数を用いて書き直そう．ここでは

$$-2\epsilon G_{ab}n^a n^b = {}^{(3)}R + \epsilon(K_{ab}K^{ab} - K^2) \tag{4.49}$$

から出発することにしよう．左辺のアインシュタインテンソルをリッチテンソルで書き直し，すこし式を移項すると

$$R = {}^{(3)}R + \epsilon(K_{ab}K^{ab} - K^2) + 2\epsilon R_{ab}n^a n^b \tag{4.50}$$

となる．右辺の最後の項をリーマンテンソルの定義に戻って式変形を行うと

$$\begin{aligned}
R_{ab}n^a n^b &= R^c{}_{acb} n^a n^b \\
&= n^a(\nabla_c \nabla_a - \nabla_a \nabla^c) n_c \\
&= n^a \nabla^b \nabla_a n_b - n^a \nabla_a \nabla^c n_c \\
&= \nabla^b(n_a \nabla^a n_b - n_b \nabla^a n_a) - \nabla^b n_a \nabla^a n_b + \nabla^b n_b \nabla^a n_a \\
&= \nabla^b(n_a \nabla^a n_b - n_b \nabla^a n_a) - K_{ab}K^{ab} + K^2
\end{aligned} \tag{4.51}$$

となる．これを上式に代入すると

$$R = {}^{(3)}R - \epsilon(K_{ab}K^{ab} - K^2) + 2\epsilon\nabla^b(n_a\nabla^a n_b - n_b\nabla^a n_a) \tag{4.52}$$

となる．さて，今は時間方向に $1+3$ 分解しているので，$\epsilon = -1$ である．よって，重力の作用関数は

$$\begin{aligned}16\pi G S_g &= \int_V R\sqrt{-g}d^4x \\ &= \int_V ({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2)N\sqrt{q}d^4x \\ &\quad -2\int_{\partial V}(n_a\nabla^a n_b - n_b\nabla^a n_a)d\Sigma^b \end{aligned} \tag{4.53}$$

となる．V は 4 次元体積，∂V はその境界である．第 2 項は境界の積分で書かれており，変分原理では境界で計量の変分が固定されている．あるいはそれらが効かない漸近条件などを考慮すると，運動方程式の導出には効かない．結局作用関数は

$$16\pi G S = 16\pi G\int L dt = \int N\left({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2\right)\sqrt{q}d^4x \tag{4.54}$$

となる．この作用関数の変数依存性を陽にみるために外的曲率 K_{ab} を次のように書き直そう．

$$\begin{aligned}K_{ab} &= \frac{1}{2}\pounds_n q_{ab} \\ &= \frac{1}{2N}\left(\pounds_{\partial_t} q_{ab} - \pounds_N q_{ab}\right) \\ &= \frac{1}{2N}\left(\dot{q}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a\right). \end{aligned} \tag{4.55}$$

ここで $n^a = N^{-1}[(\partial_t)^a - N^a]$ であることと D_a が q_{ab} に関する共変微分であることを用いた．また，$\pounds_{\partial_t} q_{ab} = \dot{q}_{ab}$ と簡単に表記した．$N_a = q_{ab}N^b$ である．計量 q_{ab} の時間微分が K_{ab} の中にのみ含まれている．D_a は空間微分なので，N^a や N の時間微分は含まれない．

次にハミルトニアンを構成するために正準運動量を以下のように定義しよう．

$$\pi^{ij} := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ij}}. \tag{4.56}$$

具体的に重力のラグランジアンを代入し計算すると

$$\begin{aligned}16\pi G\pi^{ij} &= N\sqrt{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ij}}(K_{kl}K^{kl} - K^2) \\ &= \sqrt{q}(K^{ij} - q^{ij}K) \end{aligned} \tag{4.57}$$

となる．よって，ハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned}16\pi G\mathcal{H} &= 16\pi G(\pi^{ij}\dot{q}_{ij} - L) \\ &= \sqrt{q}N(-{}^{(3)}R + K_{ij}K^{ij} - K^2) + 2\sqrt{q}(K^{ij} - q^{ij}K)D_iN_j \\ &= \sqrt{q}N(-{}^{(3)}R + K_{ij}K^{ij} - K^2) - 2\sqrt{q}N_jD_i(K^{ij} - q^{ij}K) \\ &\quad + 2D_i[\sqrt{q}(K^{ij} - q^{ij}K)N_j] \end{aligned} \tag{4.58}$$

となる．そしてハミルトニアンは

$$16\pi GH = 16\pi G \int \mathcal{H} d^3x = -\int (NC_0 + 2N^i C_i)\sqrt{q} d^3x \tag{4.59}$$

で与えられる．ここで

$$C_0 = {}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij}, \tag{4.60}$$

$$C_i = D^j(K_{ij} - q_{ij}K). \tag{4.61}$$

前節の考察から，真空の場合

$$C_0 = 0, \tag{4.62}$$

$$C_i = 0 \tag{4.63}$$

となる．前者は**ハミルトニアン拘束条件**，後者は**運動量拘束条件**と呼ばれている．従って，真空中でハミルトニアン自身の値がゼロ

$$H = 0 \tag{4.64}$$

となる．

このような拘束条件を含む理論には特別な扱いが必要である．これらの拘束条件はいわゆる第一類に属す．つまりそれらのポアッソン括弧 $\{A, B\}_{\mathrm{pb}}$ を計算し拘束条件を用いるとゼロとなる，$\{C_\mu, C_\nu\}_{\mathrm{pb}} \doteq 0$．$\doteq$ はポアッソン括弧式を計算したのちに拘束条件 $C_\mu = 0$ を用いて評価していることを表している．これは，新たな拘束条件を課す必要がないことを意味している．詳細は割愛する．

4.5 境界がある場合の取り扱い

2.4.3 節のアインシュタイン方程式の導出並びに前節において，変分原理の際に境界がない場合，あるいは漸近的に平坦な時空のような遠方で場が十分速く減衰し境界項が効かない場合を考えた．しかし，一般には境界項は無視できない場合がある．本節ではそのような場合を考えてみよう．第 6 章で定義される漸近的に平坦な時空のエネルギーにも用いられる．

さて，重力の作用関数をもう一度丁寧に変分してみよう．すると

$$\begin{aligned}\delta S_g &= \frac{1}{16\pi G}\int_V G^{\mu\nu} h_{\mu\nu}\sqrt{-g} d^4x \\ &\quad + \frac{1}{16\pi G}\int_V (\nabla^\mu \nabla^\nu h_{\mu\nu} - \nabla^2 h)\sqrt{-g} d^4x \\ &= \frac{1}{16\pi G}\int_V G^{\mu\nu} h_{\mu\nu}\sqrt{-g} d^4x \\ &\quad + \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial V} (\nabla^\nu h_{\mu\nu} - \nabla_\mu h) d\Sigma^\mu \end{aligned} \tag{4.65}$$

となる．ここで V は考察している時空の領域，∂V はその境界，$h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$ である．ここで第 2 項に焦点を当てて式変形を進めてみよう．境界で $h_{\mu\nu} = 0$

（ただし，$n^\alpha\partial_\alpha h_{\mu\nu}\neq 0$）であることに注意すると

$$\int_{\partial V}(\nabla^\nu h_{\mu\nu}-\nabla_\mu h)d\Sigma^\mu=\epsilon\int_{\partial V}g^{\nu\alpha}(\partial_\alpha h_{\mu\nu}-\partial_\mu h_{\alpha\nu})n^\mu d\Sigma$$
$$=\epsilon\int_{\partial V}(\epsilon n^\nu n^\alpha+q^{\nu\alpha})(\partial_\alpha h_{\mu\nu}-\partial_\mu h_{\alpha\nu})n^\mu d\Sigma$$
$$=-\epsilon\int_{\partial V}n^\mu q^{\nu\alpha}\partial_\mu h_{\alpha\nu}d\Sigma \tag{4.66}$$

となる．ここで境界上で $q^{\nu\alpha}\partial_\alpha h_{\mu\nu}=0$ となることも用いた．さて，変分原理からアインシュタイン方程式を導出するにはこの項が余分である．従って作用にあらかじめこの項と相殺するような項を加えておく必要がある．境界を特徴付ける量としては，その上の誘導計量が候補にあがるが，変分原理ではそれ自身は境界上でゼロとするため相殺項には入りえない．そこで登場するのが外的曲率である．外的曲率は誘導計量を境界面に垂直な方向に微分をとった量であるため，変分の際に消えることはない．係数を合わせて相殺項は

$$S_B=\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial V}\epsilon K d\Sigma \tag{4.67}$$

がその候補となる．実際に変分をとると

$$\delta S_B=\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial V}\epsilon\delta K d\Sigma. \tag{4.68}$$

ここで δK は

$$\delta K=\delta(q^{\alpha\beta}\nabla_\alpha n_\beta)=-q^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta}n_\mu=\frac{1}{2}q^{\alpha\beta}n^\mu\partial_\mu h_{\alpha\beta} \tag{4.69}$$

と計算されるので，結局

$$\delta S_B=\frac{1}{16\pi G}\epsilon\int_{\partial V}q^{\alpha\beta}n^\mu\partial_\mu h_{\alpha\beta}d\Sigma \tag{4.70}$$

となって S_g の変分から現れる境界項と相殺することが分かった．

以上より，境界がある場合の重力の作用関数は

$$S=\frac{1}{16\pi G}\int_V(R-2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x+\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial V}\epsilon K d\Sigma \tag{4.71}$$

で与えられることが分かった．第 2 項の境界項は**ギボンズ・ホーキング項**と呼ばれる．

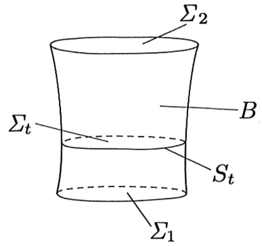


図 4.3　境界の様子．

次に，このような境界項を加えた場合のハミルトニアンを再評価してみよう．境界 ∂V として初期の空間的超曲面 Σ_1，最終の空間的超曲面 Σ_2，時間的超曲面 B の 3 つの部分からなる場合を考えよう．なお，時間スライス Σ_t の B の断面を S_t と呼ぶことにしよう．以下では宇宙項がゼロの場合 ($\Lambda = 0$) に焦点を当てよう．先ほどと同じ計算によって

$$\begin{aligned} S = &\frac{1}{16\pi G}\int_V ({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2)N\sqrt{q}d^4x \\ &- \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial V}(n_a\nabla^a n_b - n_b K)d\Sigma^b \\ &- \frac{1}{8\pi G}\int_{\Sigma_2} Kd\Sigma_2 + \frac{1}{8\pi G}\int_{\Sigma_1} Kd\Sigma_2 + \frac{1}{8\pi G}\int_B \tilde{K}dB \end{aligned} \tag{4.72}$$

となる．ここで

$$\tilde{K} = \tilde{q}^{ab}\nabla_a r_b \tag{4.73}$$

で，$\tilde{q}_{ab}$ は B 上の誘導計量で

$$\tilde{q}_{ab} = g_{ab} - r_a r_b. \tag{4.74}$$

r^a は B 上の空間的法線ベクトルである．$\tilde{K}$ は時間的超曲面 B の外的曲率のトレースである．さて作用関数の第 2 項をすこし式変形してみよう．すると

$$\begin{aligned} \int_{\partial V}(n_a\nabla^a n_b - n_b K)d\Sigma^b = &-\int_{\Sigma_2} Kd\Sigma_2 + \int_{\Sigma_1} Kd\Sigma_1 \\ &- \int_B n^a n^b \nabla_a r_b dB \end{aligned} \tag{4.75}$$

となる．これを代入すると，最終的に作用は

$$\begin{aligned} S = &\frac{1}{16\pi G}\int ({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2)N\sqrt{q}d^4x \\ &+ \frac{1}{8\pi G}\int_B (g^{ab} - r^a r^b + n^a n^b)\nabla_a r_b dB \end{aligned} \tag{4.76}$$

となる．第 2 式の被積分関数は n^a と r^a に垂直な 2 次元面 S_t 上の外的曲率のトレースであり，それを k と書くことにしよう．

$$k = (g^{ab} - r^a r^b + n^a n^b)\nabla_a r_b. \tag{4.77}$$

よって

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int ({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2)N\sqrt{q}d^4x + \frac{1}{8\pi G}\int_B kdB \tag{4.78}$$

と書ける．

具体的にミンコフスキー時空を考えてみる．すると体積積分の第 1 項はゼロ．第 2 項において各々 $k \simeq 2/r$, $dB \simeq O(r^2)$ とふるまう．従って，第 2 項は $O(r)$ と評価され，$r \to \infty$ の極限で境界項は発散してしまうのである．ミンコフスキー時空ですら発散してしまうのである．そこで，この発散分を差し引いて

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int ({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2)N\sqrt{q}d^4x$$
$$+ \frac{1}{8\pi G}\int_B (k - k_0)dB \tag{4.79}$$

のように再定義しよう．ここで k_0 はミンコフスキー時空における 2 次元面の外的曲率のトレースである．これは宇宙項を持つ時空などに拡張できる．

境界項を加えハミルトニアンを計算すると

$$\begin{aligned}16\pi GH &= 16\pi G\left(\int_V d^3x\pi^{ij}\dot{q}_{ij} - \int dtL\right)\\
&= \int_V \Big[-({}^{(3)}R - K_{ij}K^{ij} + K^2)N\\
&\quad -2N_jD_i(K^{ij} - q^{ij}K)\Big]\sqrt{q}d^3x\\
&\quad -2\int_{S_t}(k - k_0)NdS + 2\int_{S_t}(K_i^j - \delta_i^j K)N_j dS^i\end{aligned} \tag{4.80}$$

となり，前節で定義した C_0, C_i を用いると

$$16\pi GH = -\int (NC_0 + 2N^iC_i)\sqrt{q}d^3x - 2\int_{S_t}(k - k_0)NdS$$
$$+ 2\int_{S_t}(K^{ij} - q^{ij}K)N_j dS^i \tag{4.81}$$

と書ける．真空の場合，拘束条件を用いてハミルトニアンは

$$16\pi GH = -2\int_{S_t}(k - k_0)NdS + 2\int_{S_t}(K^{ij} - q^{ij}K)N_j dS^i \tag{4.82}$$

の値をとる．この公式は第 6 章において時空全体のエネルギー，運動量，角運動量の定義に用いられる．

ここではミンコフスキー時空が背景となるような時空の場合を扱ったが，宇宙項があるような時空にも拡張できる．

第 5 章
時空の接続

2層からなる系をしばしば取り扱うことがある．例えば，電磁気学では誘電体と真空からなる2層の系がしばしばとりあげられる．同様に一般相対性理論でもそのような系の考察が役立つことがある．例えば，無限に薄い球殻上にのみ存在するエネルギー分布の系が，重力崩壊の典型的な模型として考えられることがある．また，宇宙で相転移が生じればエネルギー分布に非一様性が生じるが，これらを近似的に扱うことによって相転移後の時空の進化を追うことが可能となる．最近では高次元宇宙模型でも応用されている．

本章では，2層間の接続条件を導出し，4次元時空においてミンコフスキー時空とシュバルツシルト時空の接続に応用する．また5次元の膜宇宙模型にも応用する．本章では $c=1$ とする．

5.1 ガウス正規座標

図のような系を取り扱う．Σ は境界面である．図で左側を (M_-, g_-)，右側を (Σ_+, g_+) と名付けよう．ここでは Σ は時間的超局面の場合を考える．この境界面近傍で有効かつ便利な**ガウス正規座標**の導入を行う．境界面 Σ から垂直に空間方向に測地線を発射し，それらのアフィンパラメータ y を座標とする．このとき境界面 Σ 近傍における時空の計量は

$$ds^2 = dy^2 + q_{\mu\nu}(y,x)dx^\mu dx^\nu \tag{5.1}$$

と書くことができる．$x^\mu =$ 一定軌道が測地線で，y が各測地線上のアフィンパラメータになっていることは

$$\frac{dx^\mu}{dy} = \frac{d^2x^\mu}{dy^2} = 0 \tag{5.2}$$

となっていることから測地線の方程式を満足することで分かる．この座標系は**ガウス正規座標**と呼ばれる．

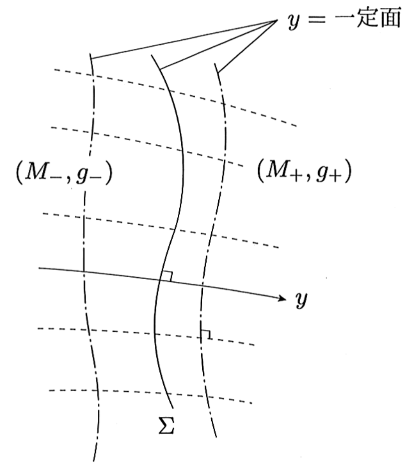


図 5.1　ガウス正規座標.

5.2　接続条件

ガウス正規座標は前章でみた時空の分解の表現を用いると $\epsilon = 1$, $N = 1$, $N_i = 0$ の場合に相当する．ここで D 次元アインシュタイン方程式の (μ, ν) 成分を書き下してみると（式 (4.40) 参照）

$$ {}^{(D)}R_{\mu\nu} = -\partial_y K_{\mu\nu} - KK_{\mu\nu} + 2K_\mu^\alpha K_{\nu\alpha} + {}^{(D-1)}R_{\mu\nu} \tag{5.3} $$

となる．この両辺を $y = 0$ まわりの微小間隔で積分を行うと右辺の第 1 項以外の項は消えて

$$ \lim_{\delta \to 0} \int_{-\delta}^{\delta} {}^{(D)}R_{\mu\nu} dy = -\lim_{\delta \to 0} \int_{-\delta}^{\delta} \partial_y K_{\mu\nu} dy. \tag{5.4} $$

δ は正の微小な数である．左辺にアインシュタイン方程式を用いると

$$ [K_{\mu\nu}]^- = -\kappa^2 \lim_{\delta \to 0} \int_{-\delta}^{\delta} \Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-2} q_{\mu\nu} T \Big) dy \tag{5.5} $$

となる．$\kappa^2 = 8\pi G_D$ である．ここで

$$ [F]^- = \lim_{\delta \to +0} \Big(F(\delta) - F(-\delta) \Big) = F_+ - F_- \tag{5.6} $$

と定義した．$y = 0$ の両側からの極限の差である．なお，計量については連続の条件

$$ [q_{\mu\nu}]^- = 0 \tag{5.7} $$

を満たしているものとしている．さてここで

$$ S_{\mu\nu} = \int_{-\delta}^{\delta} T_{\mu\nu} dy \tag{5.8} $$

を導入しておくと，上式は

$$[K_{\mu\nu}]^- = -\kappa^2\Big(S_{\mu\nu} - \frac{1}{D-2}q_{\mu\nu}S\Big) \tag{5.9}$$

と書き直される（**イスラエルの接続条件**）．この式に $q^{\mu\nu}$ を掛けてトレースをとると

$$[K]^- = \frac{\kappa^2}{D-2}S \tag{5.10}$$

を得る．これを用いると，イスラエルの接続条件は

$$[K_{\mu\nu} - q_{\mu\nu}K]^- = -\kappa^2 S_{\mu\nu} \tag{5.11}$$

とも書ける．

ここで $y=0$ 面上の拘束条件から導かれる条件式をいくつか導いておこう．まずハミルトニアン拘束条件から

$${}^{(D-1)}R - K_\pm^2 + K_{ab}^\pm K_\pm^{ab} = -2\kappa^2(T_{ab}n^a n^b)^\pm \tag{5.12}$$

が成り立つ．ここで添字の $\pm$ は両側からの極限値を表している．そして $+$ と $-$ の式の両辺を差し引くと

$$2[K_{ab}]^-\bar{K}^{ab} - 2[K]^-\bar{K} = -2\kappa^2[T_{ab}]^- \tag{5.13}$$

となる．ここで

$$\bar{K}_{ab} = \frac{1}{2}(K_{ab}^+ + K_{ab}^-) \tag{5.14}$$

としている．左辺第 1 項にイスラエルの接続条件を代入すると

$$S_{ab}\bar{K}^{ab} = [T_{ab}n^a n^b]^-. \tag{5.15}$$

一方で運動量拘束条件から，保存則

$$D_a S_b^a = -[q_b^a T_{ac} n^c]^- \tag{5.16}$$

を得る．

5.3 ダスト球殻

簡単な例として 4 次元時空におけるダストからなる球殻の運動を考える[*1]．球殻の内側は重力源がないのでミンコフスキー時空，外側は球殻のエネルギーによって時空は湾曲しシュバルツシルト時空になる．それぞれの時空の計量は

$$ds_-^2 = -dt_-^2 + dr_-^2 + r_-^2 d\Omega_2^2, \tag{5.17}$$

$$ds_+^2 = -f_+(r)dt_+^2 + f_+(r)^{-1}dr_+^2 + r_+^2 d\Omega_2^2. \tag{5.18}$$

[*1] より包括的な研究は例えば佐藤（文）によってなされている [H. Sato, Prog. Theor. Phys., **76**, 1250 (1986)].

ここで $f_+(r) = 1 - r_g/r = 1 - 2Gm/r$．両者まとめて

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \tag{5.19}$$

と書き表すことにしよう．

球殻上の誘導計量を

$$q_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -d\tau^2 + a^2(\tau)d\Omega_2^2 \tag{5.20}$$

とする．球対称性は維持しているため，球殻の軌道は

$$r := r_+ = r_- = a(\tau) \tag{5.21}$$

によって特徴付けられる．球殻の接ベクトルは

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \dot{t}\frac{\partial x^\mu}{\partial t} + \dot{r}\frac{\partial x^\mu}{\partial r}. \tag{5.22}$$

ここで「$\cdot$」は球殻上の固有時間 τ による微分を表す．$g_{ab}u^a u^b = -1$ であるから

$$-f(a)\dot{t}^2 + f^{-1}(a)\dot{a}^2 = -1 \tag{5.23}$$

を満足している．後のためにこれを

$$\dot{t} = \sqrt{f^{-1} + f^{-2}\dot{a}^2} \tag{5.24}$$

と変形しておこう．これは τ は t について単調増加であると仮定している．さて，球殻の単位法線ベクトルは $d(r - a(\tau)) = dr - \dot{a}d\tau = dr - \dot{a}\dot{t}^{-1}dt$ に比例しているので

$$n = \epsilon\alpha(dr - \dot{a}\dot{t}^{-1}dt) = \epsilon\alpha(f\partial_r + \dot{a}\dot{t}^{-1}f^{-1}\partial_t) \tag{5.25}$$

と置いてみよう．ここで ϵ は法線ベクトルを r の増加の正の方向にとる場合に 1, 負の向きにとる場合に -1 の値をとる．α は単位ベクトルの条件 $g_{ab}n^a n^b = 1$ から決まる．

$$\frac{\alpha^2}{\dot{t}^2}\left(-\frac{\dot{a}^2}{f(a)} + f(a)\dot{t}^2\right) = 1. \tag{5.26}$$

式 (5.23) を用いると

$$\alpha^2 = \dot{t}^2 \tag{5.27}$$

が得られる．α の符号の任意性は ϵ に吸収することができるので，結局 n^a は

$$n = \epsilon(f^{-1}\dot{a}\partial_t + f\dot{t}\partial_r) = \epsilon(-\dot{a}dt + \dot{t}dr) \tag{5.28}$$

と書ける．

次に外的曲率を計算しよう．まず，定義などに注意して単純に計算を進めると K^τ_τ は

$$
\begin{aligned}
K^{\tau}_{\tau} &= -K_{\tau\tau} \\
&= -\nabla_{\tau} n_{\tau} \\
&= -\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\nabla_{\mu} n_{\nu} \\
&= -\dot{t}\frac{dn_t}{d\tau} - \dot{a}\frac{dn_r}{d\tau} + \dot{t}^2 \Gamma^{r}_{tt} n_r + 2\dot{t}\dot{a}\Gamma^{t}_{tr} n_t + \dot{a}^2 \Gamma^{r}_{rr} n_r \\
&= \epsilon\Big(\dot{t}\ddot{a} - \dot{a}\ddot{t} + \frac{1}{2} f f' \dot{t}^3 - \frac{3}{2}\frac{f'}{f}\dot{a}^2\dot{t}\Big)
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

となる．ここで外的曲率の定義の中にある共変微分 ∇_{μ} は 4 次元時空の量であり，球殻上のものではないことに注意する．$\nabla_{\mu} n_{\nu}$ は 4 次元時空全体で一度定義されたテンソルであり，それらを球殻上に射影したものが外的曲率である．最終的には球殻の位置 $a(\tau)$ についての運動方程式の導出が目標にあるので，上式において $\ddot{t}$ が邪魔である．なお，$\dot{t}$ は式 (5.24) を用いれば，$\dot{a}$ に焼き直すことができるので気にしなくてよい．さらに，その式を τ で 1 階微分すると

$$
\ddot{t} = \frac{-f^{-2} f' \dot{a} - 2 f^{-3} f' \dot{a}^3 + 2 f^{-2} \dot{a}\ddot{a}}{2\dot{t}}
\tag{5.30}
$$

が得られ，$\ddot{t}$ を $\ddot{a}$ や $\dot{a}$ に書き直すことができる．これを式 (5.29) に代入し，式 (5.23) を用いて書き直していくと

$$
K^{\tau}_{+\tau} = \frac{\epsilon}{\sqrt{f + \dot{a}^2}}\Big(\ddot{a} + \frac{f'}{2}\Big)
\tag{5.31}
$$

にたどり着く．球面上の座標を x^A とし，計量を $d\Omega_2^2 = \sigma_{AB} dx^A dx^B$ と書いておくと

$$
\begin{aligned}
K^{A}_{B} &= \frac{1}{r^2}\sigma^{AC}\nabla_{C} n_{B} \\
&= -\frac{1}{r^2}\sigma^{AC}\Gamma^{r}_{CB} n_r \\
&= \frac{\sigma \dot{t} f}{r}\delta^{A}_{B} \\
&= \frac{\sigma\sqrt{\dot{a}^2 + f}}{r}\delta^{A}_{B}
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

となる．計量の非対角成分はないので，$K_{\tau r} = K_{\tau A} = K_{rA} = 0$ である．これで準備が整った．なお，以上の導出過程で球殻の構成要素の如何に依存していないことに注意されたし．

さて，この具体的な例に前節で得られた基礎関係式

$$
[K^{\mu}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu} K]^{-} = -\kappa^2 S^{\mu}_{\nu},
\tag{5.33}
$$

$$
S_{ab}\bar{K}^{ab} = [T_{ab} n^a n^b]^{-},
\tag{5.34}
$$

$$
D_a S^a_b = -[q^a_b T_{ac} n^c]^{-}
\tag{5.35}
$$

に適用してみよう．球殻の近傍で局所的にガウス正規座標を張り，計量を

$$ds^2 = dy^2 + q_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{5.36}$$

と書いておくと，ダスト球殻のエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu \delta(y) \tag{5.37}$$

で与えられる．$S_{\mu\nu}$ は上を y 方向に積分することで得られるので

$$S_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu \tag{5.38}$$

となる．

まず式 (5.33) の (τ, τ), (A, B) 成分から

$$\left[\frac{\epsilon}{\sqrt{\dot{a}^2 + f}}\left(\ddot{a} + \frac{f'}{2}\right) + \frac{\epsilon\sqrt{\dot{a}^2 + f}}{r}\right]^- = 0, \tag{5.39}$$

$$\left[-\frac{2\epsilon\sqrt{\dot{a}^2 + f}}{r}\right]^- = \kappa^2 \rho. \tag{5.40}$$

式 (5.34) は $S^\tau_\tau \bar{K}^\tau_\tau = 0$ となるが，今の場合

$$\frac{\epsilon_+}{\sqrt{\dot{a}^2 + f}}\left(\ddot{a} + \frac{f'_+}{2}\right) + \frac{\epsilon_-}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1}}\ddot{a} = 0. \tag{5.41}$$

式 (5.35) からは

$$D_\mu S^\mu_\tau = \partial_\tau S^\tau_\tau + \Gamma^A_{A\tau} S^\tau_\tau = 0. \tag{5.42}$$

$\Gamma^A_{B\tau} = (\dot{a}/a)\delta^A_B$, $S^\tau_\tau = -\rho$ であることを用いると

$$\dot{\rho} + 2\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \tag{5.43}$$

となる．これを積分すると，$\rho \propto a^{-2}$．そこで

$$m_s = 4\pi\rho a^2 \tag{5.44}$$

と書くことにしよう．m_s は球殻の質量である．

以下では場合分けの煩雑さを避けるため，球殻の両面で $\epsilon = 1$ の場合を考えることにしよう．これはどちらも球殻の法線ベクトルが面積が増大する方向にとる場合に対応している．

式 (5.39) と (5.40) から

$$\frac{\ddot{a} + f'_+/2}{\sqrt{\dot{a}^2 + f_+}} - \frac{\ddot{a}}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1}} = \frac{\kappa^2}{2}\rho. \tag{5.45}$$

式 (5.40) からは

$$-\frac{2}{a}\left(\sqrt{\dot{a}^2 + f_+} - \sqrt{\dot{a}^2 + 1}\right) = \kappa^2 \rho. \tag{5.46}$$

式 (5.41) は

$$\frac{\ddot{a} + f'_+/2}{\sqrt{\dot{a}^2 + f}} + \frac{\ddot{a}}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1}} = 0. \tag{5.47}$$

式 (5.45) と (5.47) の両辺を足すと

$$\frac{\ddot{a} + f'_+/2}{\sqrt{\dot{a}^2 + f}} = \frac{\kappa^2 \rho}{2}. \tag{5.48}$$

これに $\dot{r}$ を掛けて一回積分すると

$$\sqrt{\dot{a}^2 + f_+} + \frac{\kappa^2 m_s}{16\pi a} = C \tag{5.49}$$

となる．C は積分定数である．上式で $a = r_g$ では

$$\dot{a}|_{a=r_g} + \frac{\kappa^2 m_s}{16\pi r_g} = C. \tag{5.50}$$

一方で式 (5.46) は $a = r_g$ で

$$\dot{a}|_{a=r_g} - \sqrt{\dot{a}^2|_{a=r_g} + 1} = -\frac{\kappa^2 m_s}{8\pi r_g} \tag{5.51}$$

となる．上の 2 式から $\dot{a}|_{a=r_g}$ を消去すると C が決まって

$$C = \frac{4\pi r_g}{\kappa^2 m_s} \tag{5.52}$$

となる．これを式 (5.49) に代入し，式 (5.46) を用いて $\sqrt{\dot{a}^2 + f_+}$ を $\sqrt{\dot{a}^2 + 1}$ で表すと

$$\sqrt{\dot{a}^2 + 1} - \frac{\kappa^2 m_s}{16\pi a} = \frac{m}{m_s} \tag{5.53}$$

と整理される．この式が球殻の運動を決める．この式は再び式 (5.46) を用いて

$$\sqrt{\dot{a}^2 + f_+} = \frac{m}{m_s} - \frac{\kappa^2 m_s}{16\pi a} \tag{5.54}$$

とも書けるが，この式の左辺が非負であることから球殻の運動領域に制限

$$r \geq r_g \left(\frac{m_s}{2m} \right)^2 \tag{5.55}$$

が付くことが分かる．この制限の存在は $\epsilon = 1$ と選んだことに強く依存していることに注意されたし．

5.4 ブレーンワールド（膜宇宙論）

接続条件は高次元宇宙模型にも応用される．ここでは 5 次元時空を運動する膜の運動として我々の宇宙を記述してみよう．

5.4.1 設定と接続条件

1999 年ランドールとサンドラムによってブレーンの自己重力による余剰次元が指数関数的に湾曲した高次元模型が提案された*2．ブレーンとはメーンブレーン（薄膜）の略称である．この模型では 5 次元時空を考える．余剰次元は

*2 L. Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999).

一つである．また，普通の物質はブレーン上に閉じ込められているとし，ブレーンを中心とし左右対称を課す（Z_2 対称性）．ブレーンに沿ってガウス正規座標を導入すると，Z_2 対称性は

$$K^{+}_{\mu\nu} = -K^{-}_{\mu\nu} \tag{5.56}$$

と表現される．これをイスラエルの接続条件（式 (5.9)）に適用すると，ブレーン上の外的曲率の値が物質のエネルギー・運動量テンソルを用いて

$$K^{+}_{\mu\nu} = -K^{-}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa^2}{2}\left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3}q_{\mu\nu}S\right) \tag{5.57}$$

のように書き下すことができる．今の場合式 (5.13) は自明に成り立つ．一方，式 (5.16) からは $[q^a_b T_{ac} n^c]^- = 0$ が成り立つとすると，保存則

$$D_a S^a_b = 0 \tag{5.58}$$

が成り立つ．

設定を特定するために以下では次の作用関数に従う系を考えよう．

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int \left({}^{(5)}R - 2\Lambda\right)\sqrt{-g}d^5x + \int (-\sigma + \mathcal{L})\sqrt{-q}d^4x. \tag{5.59}$$

第 1 項が 5 次元全体の作用でバルク作用と呼ばれている．Λ は 5 次元時空の宇宙項で，ブレーン上の計量が平坦になる場合はこの宇宙項が負の場合に限られることが後に分かる．第 2 項がブレーン上の作用である．σ がブレーン張力．$\mathcal{L}$ は物質の作用密度である．この作用を計量 g_{ab} による変分を行うとアイシュタイン方程式は

$$^{(5)}G_{ab} = \kappa^2\left[-\Lambda g_{ab} + S_{ab}\right] \tag{5.60}$$

となる．ここで $S_{ab}n^a = 0$ であり，ブレーン近傍でガウス正規座標をとると

$$S_{\mu\nu} = \lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta} T_{\mu\nu}dy = -\sigma q_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} \tag{5.61}$$

である．$\tau_{\mu\nu}$ は物質の 4 次元エネルギー・運動量テンソルで $S_{\mathrm{matter}} = \int \mathcal{L}\sqrt{-q}d^4x$ としたときに通常の手続きに従って

$$\tau^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-q}}\frac{\delta S_{\mathrm{matter}}}{\delta q_{\mu\nu}} \tag{5.62}$$

として計算される．イスラエルの接続条件はこのとき

$$K^{+}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa^2\sigma}{6}q_{\mu\nu} - \frac{\kappa^2}{2}\left(\tau_{\mu\nu} - \frac{1}{3}q_{\mu\nu}\tau\right) \tag{5.63}$$

となる．

5.4.2　宇宙論解

5 次元全体の時空としてシュバルツシルト・反ド・ジッター時空を考えよう．計量は 3.3.1 節でみたように

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2\sigma_{AB}dx^A dx^B \tag{5.64}$$

で与えられる．σ_{AB} は 3 次元定曲率空間の計量である*3．$f(r)$ は

$$f(r) = k - \frac{m}{r^2} + \frac{r^2}{\ell^2} \tag{5.65}$$

で与えられ，k は定曲率空間が 3 次元平面，3 次元球面，3 次元双曲面に応じてそれぞれ $0, 1, -1$ の値をとる．m は質量に比例し，ℓ は反ド・ジッター時空の曲率半径である．ブレーンの軌道を $r = a(t)$ で表されるとし，ブレーン上の計量を

$$q_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -d\tau^2 + a(\tau)^2\sigma_{AB}dx^A dx^B \tag{5.66}$$

と書く．ここで τ はブレーン上の固有時間であり

$$-f(a)\dot{t}^2 + \frac{1}{f(a)}\dot{a}^2 = -1 \tag{5.67}$$

が成り立っている．「$\cdot$」は τ による微分である．

接続条件は今の場合簡単になって

$$K^{\mu+}_{\nu} - \delta^\mu_\nu K^+ = -\frac{\kappa^2}{2}S^\mu_\nu, \tag{5.68}$$

$$D_a S^a_b = 0 \tag{5.69}$$

の二つである．ここで

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= (\rho + \sigma)u_\mu u_\nu + (P - \sigma)(q_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \\ &= \rho u_\mu u_\nu + P(q_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) - \sigma q_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{5.70}$$

であることから，式 (5.69) からエネルギー保存則

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \tag{5.71}$$

を得る．式 (5.68) から二つの式

$$3\epsilon_+ \frac{\dot{t}_+}{a_+} f(a_+) = -\frac{\kappa^2}{2}(\rho + \sigma), \tag{5.72}$$

$$-2\frac{\epsilon_+ \dot{t}_+}{a_+} f(a_+) - \frac{\epsilon_+}{\dot{t}_+ f(a_+)}\left(\ddot{a}_+ + \frac{1}{2}f'(a_+)\right) = -\frac{\kappa^2}{2}(P - \sigma) \tag{5.73}$$

を得る．そして式 (5.72) と (5.67) を用いて $\dot{t}$ を消去すると

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{\kappa^4\sigma^2}{36} - \frac{1}{\ell^2} + \frac{\kappa^4\sigma}{18}\rho + \frac{\kappa^4\rho^2}{36} + \frac{m}{a^4} \tag{5.74}$$

が得られる．次に式 (5.72) と (5.73) を用いて $\dot{t}$ を消去すると

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\kappa^4\sigma^2}{36} - \frac{1}{\ell^2} - \frac{\kappa^4\sigma}{36}(\rho + 3P) - \frac{\kappa^2}{36}\rho(2\rho + 3P) - \frac{m}{a^4} \tag{5.75}$$

---

*3 3 次元の場合，計量が式 (5.64) の形の下で，アインシュタイン方程式からワイルテンソルからゼロとなる，即ち定曲率空間であることが自動的に保証される．

となる．一方で4次元アインシュタイン方程式から得られるフリードマン方程式をもう一度書いておくと（式(3.109), (3.110)）

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{5.76}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + P). \tag{5.77}$$

これらを見比べると

$$\Lambda \leftrightarrow \frac{\kappa^4\sigma^2}{12} - \frac{3}{\ell^2}, \tag{5.78}$$

$$\frac{8\pi G}{3} \leftrightarrow \frac{\kappa^4\sigma}{18} \tag{5.79}$$

の対応が付けられる．よって，ブレーン上のフリードマン方程式は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{1}{3}\Lambda + \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\kappa^4\rho^2}{36} + \frac{m}{a^4}, \tag{5.80}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + P) - \frac{\kappa^4}{36}\rho(2\rho + 3P) - \frac{m}{a^4} \tag{5.81}$$

となる．4次元のフリードマン方程式と比べると，m/a^4 や $\kappa^4\rho^2$, $\kappa^4\rho(2\rho+3P)$ のような項が加わっていることに気が付く．前者は5次元シュバルツシルト・反ド・ジッターブラックホールの質量が起源となっている項で，スケール因子依存性は輻射と同じである．この項はブラックホールがなければ消失する項であるため，ブレーン上の物質としての輻射とは異なるものであることに注意する．そこでこの「輻射」は暗黒輻射と呼ばれている．余剰次元にブラックホールがあるとすると，我々のブレーン宇宙ではあたかも輻射があるかのように宇宙が時間発展するのである*4．後者は $\rho, P \ll \sigma$ を満たす低エネルギーで無視できる．従って，$m=0$，且つ低エネルギーでは4次元アインシュタイン方程式が予言するものと一致している．以上から，4次元の一様等方宇宙モデルは5次元シュバルツルト・反ド・ジッター時空上を運動する薄膜として記述されることが分かった*5．

最後にブレーン上で真空，ブラックホールの質量がゼロの特殊な場合 ($\rho = P = m = 0$) を考えてみよう．このときスケール因子の満たす方程式は

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\kappa^4\sigma^2}{36} - \frac{1}{\ell^2}, \tag{5.82}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{\kappa^4\sigma^2}{36} - \frac{1}{\ell^2} \tag{5.83}$$

となる．特に

$$\frac{1}{\ell} = \frac{\kappa^2\sigma}{6} \tag{5.84}$$

*4 これはマルダセナの提案した重力/ゲージ理論対応予想と合致する [J. Garriga and M. Sasaki, Phys. Rev. D **62**, 043523 (2000)].

*5 ここでの議論は井田に従った [D. Ida, JHEP **0009**, 014 (2000)]. なお，「暗黒輻射」は向山によって名付けられた [S. Mukohyama, Phys. Lett. B **473**, 241 (2000)].

と調整された場合に注目してみよう．すると上式は

$$\frac{\ddot{a}}{a} = 0, \tag{5.85}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} \tag{5.86}$$

となる．これらを満たす $k = 0$ の解は $a =$ 定数となる．従って，ブレーン上の計量は平坦なものになりバルク時空の計量は

$$ds^2 = -\frac{r^2}{\ell^2}dt^2 + \frac{\ell^2}{r^2}dr^2 + r^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{5.87}$$

と与えられる．これは 3.2.3 節ででてきたポアンカレ座標で書かれた反ド・ジッター時空である．

我々の宇宙であるところの 4 次元ミンコフスキー時空は 5 次元反ド・ジッター時空に浮かんでいるという描像が得られる．

5.4.3 ブレーン上のアインシュタイン方程式

前小節では，4 次元の一様等方宇宙モデルやミンコフスキー時空がどのようにブレーンワールドで記述されるかを見た．しかし，実際の宇宙には揺らぎが存在する．また，ブラックホールなどのように非線形現象をどのように扱えばよいのであろうか．そのためには，ブレーンを重力源として高次元時空全体を解く必要がある．

本小節ではブレーン上を支配しているアインシュタイン方程式の導出を試みる．アイデアの基本は 5 次元時空を 4 次元に射影してみることである*6．まずガウス方程式のうち二つの添字について縮約をとると

$${}^{(4)}R_{ab} = q_a^e q_b^f {}^{(5)}R_{ecfd} q^{cd} + KK_{ab} - K_a^c K_{bc} \tag{5.88}$$

を得る．この式を用いると 4 次元のアインシュタインテンソルを 5 次元のリーマンテンソルと外的曲率で書き下すことができる．さらに 5 次元のリーマンテンソルを，5 次元のワイルテンソルと 5 次元のリッチテンソルで書き直しておく．

$$\begin{aligned}{}^{(5)}R_{abcd} = &\frac{2}{3}(g_{a[c}{}^{(5)}R_{d]b} - g_{b[c}{}^{(5)}R_{d]a}) - \frac{1}{6}g_{a[c}g_{d]b}{}^{(5)}R \\ &+ {}^{(5)}C_{abcd}.\end{aligned} \tag{5.89}$$

5 次元のリッチテンソルはアインシュタイン方程式を使えば，5 次元のエネルギー運動量テンソルに書き直すことができる．最後に，ブレーン上で外的曲率がイスラエルの接続条件で 4 次元のエネルギー運動量テンソルで書けることを考慮すると，結局

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + 8\pi G\tau_{\mu\nu} + \kappa^4 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \tag{5.90}$$

---

*6 筆者，前田，佐々木によってなされた [T. Shiromizu, K. -i. Maeda, M. Sasaki, Phys. Rev. D **62**, 024012 (2000)]．このような射影的な手法が使える理由には背景にマルダセナの重力/ゲージ理論対応予想があるという解釈も成り立つ．

を得る．ここで

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}\kappa^2\left(\Lambda + \frac{1}{6}\kappa^2\sigma^2\right), \tag{5.91}$$

$$8\pi G = \frac{1}{6}\kappa^4\sigma, \tag{5.92}$$

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\tau_{\mu\alpha}\tau_\nu^\alpha + \frac{1}{12}\tau\tau_{\mu\nu} + \frac{1}{8}q_{\mu\nu}\tau_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} - \frac{1}{24}q_{\mu\nu}\tau^2, \tag{5.93}$$

$$E_{\mu\nu} = {}^{(5)}C_{\mu a\nu b}n^a n^b \tag{5.94}$$

である．この方程式がブレーン上で成り立つアインシュタイン方程式である[*7]．ここで Λ_4 はブレーン上の宇宙項，G は 4 次元のニュートン重力定数である[*8]．左辺の第 3 項，4 項が補正項である．前者は前小節での式 (5.74) における ρ^2 等の項に，後者が 5 次元ブラックホールの質量パラメータに比例する暗黒輻射の項にそれぞれ対応している．

[*7] この式で $E_{\mu\nu}$ は 5 次元ワイルテンソルであるので，方程式系が 4 次元で閉じていない．これは当たり前である．$E_{\mu\nu}$ を決めるには，それらを支配している方程式を解く必要がある．低エネルギーではその効果は無視できるものの，高エネルギー現象を扱うためには無視できない．

[*8] ランドール・サンドラムモデルでは負の張力を持つブレーンも考えられている．その場合，この重力定数の式から G が負となってしまう（反重力？）という一見おかしなことが起きてしまう．実は，負の張力を持つブレーンの場合，$E_{\mu\nu}$ からの寄与が一般に無視できないことが分かっている．それからの寄与を考慮すると重力定数と張力の間の関係式が変更を受け，正の重力定数が導かれることが分かる [J. Garriga and T. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **84**, 2778 (2000)].

第 6 章
エネルギー，運動量，角運動量

本章では漸近的に平坦な時空の全エネルギー，運動量，角運動量の定義について議論しよう．漸近的に平坦な時空の遠方おいて，ポアンカレ対称性が近似的に存在すると期待できるため，それらに付随した大域的な保存量が自然に定義される．本章では $c = 1$ とする．

6.1 エネルギー

等価原理により時空に特別な対称性が存在しない限り，局所的にエネルギーを定義することは一般に難しい．しかしながら時空が漸近領域を持ち，そこで近似的に対称性が存在するならばそれに付随したエネルギーを定義することが可能である．ここではしばしば考察の対象となる漸近的に平坦な時空に絞ることにしよう．

漸近的に平坦な時空の遠方での振る舞いは

$$ds^2 = -(1 - 2GM/r)dt^2 + \cdots \tag{6.1}$$

となる．ここでの時空のエネルギーは M になることがニュートン重力を思い浮かべると予想が付く．

さて，漸近的に平坦な時空における無限遠方における時空の計量の振る舞いは

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{6.2}$$

である．ここで $\eta_{\mu\nu}$ はミンコフスキー時空の計量で $h_{\mu\nu}$ はそれからのずれを表す．4 次元時空において遠方では

$$h_{\mu\nu} = O(1/r) \tag{6.3}$$

とふるまうと期待される．空間的無限遠方に伝播する物質や重力波は存在しないので，時空は十分静的であると近似できる．これらの振る舞い，即ちミンコフスキー時空からのずれが小さく，近似的に静的であることを時空の全域に成

り立つと仮定し，エネルギーの表式を考察してみよう．ここではさらに物質が塵状のものに限る．すると，線形近似でアインシュタイン方程式は

$$\partial^\alpha \partial_\alpha h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h^\alpha_\alpha - \partial_\mu \partial_\alpha h^\alpha_\nu - \partial_\nu \partial_\alpha h^\alpha_\mu = -16\pi G \Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} T \Big) \tag{6.4}$$

となる．今の仮定下で

$$T_{0i} = T_{ij} = \partial_t h_{\mu\nu} = 0 \tag{6.5}$$

と近似的に成り立つとしている．するとすこし計算した後に

$$\partial_i \partial_j h^{ij} - \partial_i \partial^i h^j_j = 16\pi G T_{00} \tag{6.6}$$

が成り立つ．よってエネルギーは

$$E = \int d^3x T_{00} = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x (\partial_i \partial_j h^{ij} - \partial_i \partial^i h^j_j) \tag{6.7}$$

で与えられる．体積積分の被積分関数が全微分で書かれているおかげで，無限遠方での表面積分でこのエネルギーは表現される（**ADM エネルギー**）．

$$E = \frac{1}{16\pi G} \int_{S_\infty} dS_i (\partial_j h^{ij} - \partial_i h^j_j). \tag{6.8}$$

この導出の過程でいくつかの仮定を用いたが，無限遠方ではそれらの仮定は自然に正当化されるため，上式は一般の場合に使われる．なお，ここでの座標 x^i は遠方で張られる正規直交座標となるようなものであることに注意する．遠方での座標を任意にとると

$$E = \frac{1}{16\pi G} \int_{S_\infty} dS_i (D_j h^{ij} - D_i h^j_j) \tag{6.9}$$

となる．D_i は $t =$ 一定面上の共変微分．

具体的な計算をシュバルツシルト時空を例にとって行ってみよう．遠方で正規直交座標になる座標を用いると混乱なく計算が可能である．等方座標で書かれたシュバルツシルト解がそれに該当し，計量は

$$ds^2 = -\left[\frac{1 - \frac{GM}{2\rho}}{1 + \frac{GM}{2\rho}} \right]^2 dt^2 + \Big(1 + \frac{GM}{2\rho} \Big)^4 \delta_{ij} dx^i dx^j \tag{6.10}$$

と書かれる．ここで $\rho = \sqrt{\delta_{ij} x^i x^j}$.

$$h_{ij} \simeq \frac{2GM}{\rho} \delta_{ij} \tag{6.11}$$

であるから

$$E = \frac{1}{16\pi G} 4\pi \rho^2 \frac{x^i}{\rho} \cdot 2 \cdot 2GM \frac{x^i}{\rho^3} = M \tag{6.12}$$

と評価され，予想通りの結果が確認された．

物質がある局所的なエネルギー条件を満足している場合，全エネルギーの正定

値性ならびに，ゼロであるときに限り平坦な時空になることが示される（7.5.2節参照）．

第 4 章で定義したハミルトニアンとの関係も議論しておくことは有意義であろう．まず式 (6.9) の表式を書き直しておこう．そこで時間一定面の計量を

$$q_{ij}dx^i dx^j = q_{rr}dr^2 + 2q_{rA}drdx^A + q_{AB}dx^A dx^B \tag{6.13}$$

と書くことにし，遠方で

$$q_{(0)ij}dx^i dx^j = dr^2 + r^2\sigma_{AB}dx^A dx^B \tag{6.14}$$

に漸近するものとする．σ_{AB} は 2 次元単位球面の計量である．十分遠方では線形近似が成り立つので

$$q_{ij}dx^i dx^j \simeq (1+h_{rr})dr^2 + 2h_{rA}drdx^A + (r^2\sigma_{AB} + h_{AB})dx^A dx^B \tag{6.15}$$

となる．ここで h_{ij} は 1 次の微小量であり，遠方では

$$h_{rr} = O(1/r),\ h_{rA} = O(1/r),\ h_{AB} = O(r) \tag{6.16}$$

のようにふるまう．これを用いるとエネルギーは

$$E = \frac{1}{16\pi G}\int dS\Big(\frac{2}{r}h_{rr} + \frac{1}{r^3}\sigma^{AB}h_{AB} - \frac{1}{r^2}\sigma^{AB}\partial_r h_{AB}\Big) \tag{6.17}$$

となる．一方で，エネルギーは正準形式から定義されたハミルトニアン（式 (4.81)）と関係していると考えるのは自然である．もう一度ハミルトニアンの表式を書いておこう．

$$H = -\frac{1}{8\pi G}\int_{S_t}(k-k_0)NdS + \frac{1}{8\pi G}\int_{S_t}(K^i_j - \delta^i_j K)N^j dS_i. \tag{6.18}$$

ハミルトニアンからは $N=1,\ N^i=0$ の観測者から測ったエネルギーは

$$H = -\frac{1}{8\pi G}\int (k-k_0)dS \tag{6.19}$$

となる．今の場合，k は q_{ab} の共変微分と r ＝一定面の単位法線ベクトル $r^a \simeq (1-h_{rr}/2)(\partial_r)^a$ を用いて

$$k = D_a r^a \tag{6.20}$$

と書け，計算を進めると

$$k \simeq \mathcal{D}_A n^A + \frac{2}{r} - \frac{1}{r}h_{rr} + \frac{1}{r^3}\sigma^{AB}h_{AB} + \frac{1}{2r^2}\sigma^{AB}\partial_r h_{AB} \tag{6.21}$$

となる．ここで $\mathcal{D}_A$ は σ_{AB} に関する共変微分である．そして最終的に

$$H = \frac{1}{16\pi G}\int dS\Big(\frac{2}{r}h_{rr} + \frac{2}{r^3}\sigma^{AB}h_{AB} - \frac{1}{r^2}\sigma^{AB}\partial_r h_{AB}\Big) \tag{6.22}$$

となる．ADM エネルギーの式 (6.17) と比べると，第 2 項の係数が異なることに気が付くであろう．しかし

$$\sigma^{AB}h_{AB} = O(r^0) \tag{6.23}$$

のように座標を選ぶことができるので，互いの第 2 項は積分に寄与せずに二つの定義は一致する．結局

$$H = E = \frac{1}{16\pi G}\int dS\Big(\frac{2}{r}h_{rr} - \frac{1}{r^2}\sigma^{AB}\partial_r h_{AB}\Big). \tag{6.24}$$

例えばシュバルツシルト時空の極座標系では厳密に $h_{AB} = 0$ であった．

6.2　運動量・角運動量

次に運動量，角運動量について考えよう．式 (6.18) において，i 方向の運動量は遠方で $N \to 0$, $N^j \to N^j = (\partial_{x^i})^j = \delta^j_i$ ととればよい．すると

$$P_{(i)} = \frac{1}{8\pi G}\int_{S_t}(K^j_i - \delta^j_i K)dS_j \tag{6.25}$$

となる．

一方で角運動量は $N \to 0$, $N^i \to N^i_{(\phi)} = dx^i/d\phi$ とすればよい．

$$P_{(\phi)} = \frac{1}{8\pi G}\int_{S_t}(K^j_i - \delta^j_i K)N^i_{(\phi)}dS_j \tag{6.26}$$

となる．これらが遠方で定義された ADM 運動量と角運動量である．

具体例としてカー時空の角運動量を計算してみよう．この場合

$$P_{(\phi)} = \frac{1}{8\pi G}\int_{S_t} K^r_\phi dS \tag{6.27}$$

となる．K^r_ϕ の主要項は

$$K^r_\phi \simeq K_{r\phi} \simeq \Gamma^t_{r\phi} \simeq \frac{3GMa\sin^2\theta}{r^2} \tag{6.28}$$

と計算されるので，

$$P_{(\phi)} = \frac{3Ma}{4}\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = Ma \tag{6.29}$$

となる．これがカー時空の角運動量である．

第 7 章
諸定理とアインシュタイン方程式

数値的にアインシュタイン方程式を解くことがさほど難しくないと考えられている今日でも，アインシュタイン方程式を解くことなく結論できることがあると有意義である．また，それらは定理の体裁をなしているため永久不滅に正しく，直接天文学的な洞察を与えることができないまでも，それらの土台を提供することができる．本章では $c=1$ とする．

7.1　アインシュタイン方程式の特殊性

これから取り上げる諸定理において時空を支配している方程式がアインシュタイン方程式であることが非常に重要である．例えば，極限初期ではアインシュタイン方程式からずれることが高エネルギー理論から予想されている．また，最近の観測で明らかとなった宇宙の加速膨張を説明するために宇宙スケールでは重力理論がアインシュタイン理論から大きくずれている可能性が議論されている．しかし，このような理論を一旦受け入れると，今から説明する諸定理はことごとく破綻する．極限初期宇宙の場合は量子効果が効き始める領域であるから，古典的な定理が破れると考えるのは自然であろう．しかし，古典論が十分成り立っていると考えられる宇宙スケールでも定理が成り立たなくなってしまうような理論を受け入れてよいかは幾分疑問である．自然を記述する理論は美しくあるべし，とする物理屋の美的センスはこれまで成功を納めてきた．これを時空の理論にも期待するべきであろう．アインシュタイン理論では微分幾何学がその背景の数学であった．例え宇宙の加速膨張を説明するにしてもその新しい時空の理論は美しく定式化されるべきである．このようなことを 100 年後に登場するかもしれない理論にも期待したい．そこで，ここにアインシュタイン理論で納めた数々の美しい結果をまとめておくことは意義があるであろう．

7.2　特異点定理

ブラックホール内部，ビッグバン宇宙などで特異点が現れることを具体的な例でみてきた．これが厳密解の対称性によるもので対称性を破ることによって現れなくなるのであれば，厳密解の特異点の存在を現実の宇宙で心配する必要はないであろう．しかし，**特異点定理**は現実的な世界において特異点が自然に発生することを主張する．

特異点定理の証明の準備として測地線束から重力の引力特有の性質を明らかにしよう．その後，特異点の定義を行い特異点定理の証明を行う．

7.2.1　測地線束の振る舞い

時間的測地線束の振る舞いを調べよう．測地線の固有時間を τ，測地線をラベルするパラメータを z とし，測地線と $\tau=$ 一定線が垂直になるようにしておく．その測地線の接ベクトル場を $\xi^a=(\partial_\tau)^a$, $\tau=$ 一定線の曲線の接ベクトルを $\eta^a=(\partial_z)^a$ と書こう．すると直ちに

$$\pounds_\xi \eta = 0 \tag{7.1}$$

が満たされることが分かる．これを共変微分を用いて書き直すと

$$\xi^b\nabla_b\eta^a = \eta^b\nabla_b\xi^a = B^a{}_b\eta^b \tag{7.2}$$

となる．ここで $B^a{}_b=\nabla_b\xi^a$ と置いた．η^a は隣り合う測地線間の相対距離に対応しており，上の式から $B^a{}_b$ はその時間変化率を表している．なお

$$B_{ab}\xi^a = B_{ab}\xi^b = 0 \tag{7.3}$$

を満たしている．ここで $\xi^a\xi_a=-1$, $\xi^a\nabla_a\xi^b=0$ を用いた．

この B_{ab} に幾何学的な意味を持たせるために，次のように分解しておこう．

$$B_{ab} = \frac{1}{3}\theta q_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}. \tag{7.4}$$

ここで q_{ab} は ξ^a に垂直な面の誘導計量

$$q_{ab} = g_{ab} + \xi_a\xi_b. \tag{7.5}$$

$\theta, \sigma_{ab}, \omega_{ab}$ はそれぞれ

$$\theta := B_{ab}q^{ab} = \frac{1}{2}q^{ab}\pounds_\xi q_{ab} = \pounds_\xi \ln\sqrt{\det q_{ab}}, \tag{7.6}$$

$$\sigma_{ab} := B_{(ab)} - \frac{1}{3}q_{ab}\theta, \tag{7.7}$$

$$\omega_{ab} := B_{[ab]} \tag{7.8}$$

と定義されている．σ_{ab} の定義で現れている $(\cdots)$ で囲まれている添字は対称化を表す，$B_{(ab)} := (1/2)(B_{ab}+B_{ba})$．$\theta$ は測地線束の面積の膨張率，σ_{ab} は束

の切断面の変形率，ω_{ab} は回転率を表している．これらの時間発展に興味があるので，B_{ab} の測地線方向の微分をとってみよう．すると

$$\begin{aligned}\xi^c\nabla_c B_{ab} &= \xi^c\nabla_c\nabla_b\xi_a \\ &= \xi^c\nabla_b\nabla_c\xi_a + R_{cba}{}^d\xi^c\xi_d \\ &= -(\nabla_b\xi^c)(\nabla_c\xi_a) + R_{cba}{}^d\xi^c\xi_d \\ &= -B^c{}_b B_{ac} + R_{cba}{}^d\xi^c\xi_d \end{aligned} \tag{7.9}$$

となる．ここでは膨張率 θ の時間発展に注目しよう．そのために q^{ab} を用いて両辺のトレースをとると

$$\xi^c\nabla_c\theta = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{ab}\xi^a\xi^b \tag{7.10}$$

となる．この方程式は**ライチャウドゥリ方程式**と呼ばれている．この方程式の導出過程において，アインシュタイン方程式を用いていないことに注意されたし．同様に B_{ab} の式 (7.9) の対称トレースレス部分，反対称部分をとることによって σ_{ab}, ω_{ab} の方程式を得ることができる．

$$\begin{aligned}\xi^c\nabla_c\sigma_{ab} = &-\frac{2}{3}\theta\sigma_{ab} - \sigma_{ac}\sigma^c{}_b - \omega_{ac}\omega^c{}_b \\ &+ \frac{1}{3}q_{ab}(\sigma_{cd}\sigma^{cd} - \omega_{cd}\omega^{cd}) - C_{acbd}\xi^c\xi^d \\ &+ \frac{1}{2}\left(q^c_a q^d_b R_{cd} - \frac{1}{3}q_{ab}q^{cd}R_{cd}\right), \end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\xi^c\nabla_c\omega_{ab} = -\frac{2}{3}\theta\omega_{ab} + 2\omega_{c[a}\sigma_{b]}{}^c. \tag{7.12}$$

最初に $\omega_{ab} = \sigma_{ab} = 0$ だとしても，C_{abcd} や R_{ab} の項のために σ_{ab} は誘起される．一方で，ω_{ab} は初期にゼロならばその後もゼロになる．

同様に光的測地線束の場合は，測地線の接ベクトルを k^a，それに垂直なベクトルを l^a とすると，k^a と l^a で指定される 2 次元面の誘導計量は

$$h_{ab} = g_{ab} + k^a l^b + l^a k^b \tag{7.13}$$

となる．ここで $k_a l^a = -1$ を満たしているとした．これらを用いて，時間的測地線束の場合の B_{ab} の類似物は

$$\hat{B}_{ab} = h^c_a h^d_b \nabla_c k_d = \frac{1}{2}\hat{\theta}h_{ab} + \hat{\sigma}_{ab} + \hat{\omega}_{ab} \tag{7.14}$$

である．ここで $\hat{\theta}, \hat{\sigma}_{ab}, \hat{\omega}_{ab}$ は

$$\hat{\theta} := q^{ab}\hat{B}_{ab} = \frac{1}{2}h^{ab}\pounds_k h_{ab} = \pounds_k \ln\sqrt{\det h_{ab}}, \tag{7.15}$$

$$\hat{\sigma}_{ab} = \hat{B}_{(ab)} - \frac{1}{2}\hat{\theta}h_{ab}, \tag{7.16}$$

$$\hat{\omega}_{ab} = \hat{B}_{[ab]} \tag{7.17}$$

と定義されている．各々の幾何学的意味は時間的な場合と同じである．この場

合にも膨張率 $\hat{\theta}$ の発展をみると

$$k^a\nabla_a\hat{\theta} = -\hat{B}^{ab}\hat{B}_{ba} - R_{ab}k^ak^b$$
$$= -\frac{1}{2}\hat{\theta}^2 - \hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} + \hat{\omega}_{ab}\hat{\omega}^{ab} - R_{ab}k^ak^b \tag{7.18}$$

となる．これもライチャウドゥリ方程式と呼ばれている．$\hat{\sigma}_{ab}, \hat{\omega}_{ab}$ の式も同様に

$$k^c\nabla_c\hat{\sigma}_{ab} = -\hat{\theta}\hat{\sigma}_{ab} - h^c_a h^d_b C_{cedf}k^ek^f, \tag{7.19}$$

$$k^c\nabla_c\hat{\omega}_{ab} = -\theta\hat{\omega}_{ab} \tag{7.20}$$

となる．時間的な場合と同じく，σ_{ab} は最初にゼロでもワイルテンソルが存在すれば，その後誘起される．一方で，ω_{ab} は最初にゼロならば，その後もゼロである．

さて，このライチャウドゥリ方程式から直ちに得られる重要な結論がある．まず，時間的な測地線束に注目し，アインシュタイン方程式を適用することから始めよう．すると式 (7.10) のリッチテンソルはエネルギー・運動量テンソルで書けて

$$\xi^c\nabla_c\theta = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - 8\pi G\Big(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T\Big)\xi^a\xi^b \tag{7.21}$$

となる．上式の右辺の最後の項に対して

$$\Big(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T\Big)\xi^a\xi^b \geq 0 \tag{7.22}$$

が成り立つとする．これは**強いエネルギー条件**と呼ばれている．この意味についてすこしみてみよう．例として完全流体を考えてみよう．このとき

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b) \tag{7.23}$$

であるから，強いエネルギー条件は

$$\Big(2(u^a\xi_a)^2 - 1\Big)\rho + \Big(2(u^a\xi_a)^2 + 2\Big)P \geq 0 \tag{7.24}$$

となる．仮に $u^a = \xi^a$ としてみると

$$\rho + 3P \geq 0 \tag{7.25}$$

となる．これは $\rho \geq 0$, $P \geq 0$ の場合に成り立つ．このように強いエネルギー条件は正の密度と圧力という普通の古典的な物質なら満たされている．

ここで，ある空間的超曲面 Σ から垂直に過去向き発射された時間的測地線束を考えよう．この場合 $\omega_{ab} = 0$ が成り立つ．すると強いエネルギー条件を課すと次の不等式が成り立つ．

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0. \tag{7.26}$$

ここで $\sigma_{ab}\sigma^{ab} \geq 0$ であることも用いた．この不等式を積分すると

$$\theta^{-1} \geq \theta_0^{-1} + \frac{\tau}{3} \tag{7.27}$$

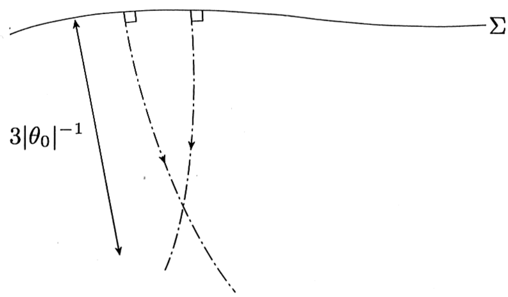


図 7.1　測地線束の重力による収束.

となる．ここで $\tau = 0$（Σ 上）での θ の値 θ_0 が負であるとする．このときこの不等式から $\tau \leq 3|\theta_0|^{-1}$ を満たす過去のどこかで θ が発散することが分かる．この θ が発散する“点”は Σ の**共役点**と呼ばれている．膨張率の定義から，この“点”で測地線束の断面積がゼロとなっている．まさに焦点のようになっている．命題としてまとめておくと，

命題（時間的測地線束の共役点定理）：強いエネルギー条件が満たされている時空で空間的超曲面 Σ から過去向きに垂直に出る時間的測地線の束を考える．その Σ 上での膨張率を $\theta_0 < 0$ とすると，光的測地線束は $\tau \leq 3|\theta_0|^{-1}$ を満たすところで共役点が生じる．

同様のことが**光的エネルギー条件**

$$R_{ab}k^a k^b = 8\pi G T_{ab}k^a k^b \geq 0 \tag{7.28}$$

を満たす場合，光的測地線束についても成り立つ．なお，任意の時間的ベクトル ξ^a に対する条件 $T_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$ は弱いエネルギー条件と呼ばれる．式 (7.26) に対応する式は

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\lambda} + \frac{1}{2}\hat{\theta}^2 \leq 0 \tag{7.29}$$

である．後の応用のために時間的な場合とすこし設定を変えて，ある面 S から未来向きの光的測地線束を考えよう．そして，S 上（$\lambda = 0$ とする）での膨張率の値が $\hat{\theta}_0 < 0$ とする．すると，時間的測地線束と同様に，S から $\lambda \leq 2|\hat{\theta}_0|^{-1}$ を満足するどこかで $\hat{\theta}_0$ が負に発散する．この点は S に対する共役点と呼ばれる．これも命題としてまとめておく．

命題（光的測地線束の共役点）：光的エネルギー条件が満たされている時空で面 S から未来向きに垂直に出る光的測地線束を考える．その S 上での膨張率を $\hat{\theta}_0 < 0$ とすると，光的測地線束は $\lambda \leq 2|\hat{\theta}_0|^{-1}$ を満たすところで共役点を持つ．

この命題に関連してある重要な定理が存在するが，その前にいくつか概念を

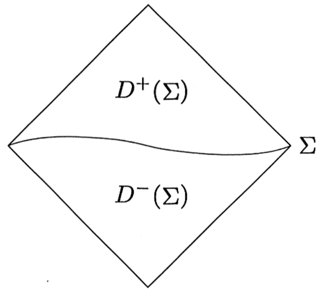


図 7.2　$D^{\pm}(\Sigma)$.

導入しておく．時空 M における超曲面 Σ が与えられたとき，$D^{\pm}(\Sigma)$ を M 上の以下の性質を満たす点の集合として定義する．$D^{\pm}(\Sigma)$ 上の点から出るすべての過去向き（未来向き）に延長不可能な因果的な曲線は Σ と交わる．この集合の物理的な意味は明快である．要するに Σ 上の情報だけで因果的に完全に決まる時空の未来（過去）の領域である．一般には $D^{\pm}(\Sigma)$ は M の部分集合であるが，それが時空全体となる，即ち $D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma) = M$ となっている場合がある．この場合，時空 M を**大域的に双曲的**であるといい，Σ を**コーシー面**と呼ぶ．

準備が整った．このコーシー面が存在する時空では次の定理が成り立つ．

定理（最長測地線）：大域的に双曲的な時空を考え，そのコーシー面を Σ とする．このとき，Σ よりも未来の点 p と Σ を結ぶ過去向きの時間的曲線の中でその長さが最長となるものは，p と Σ の間に共役点を持たず，Σ に垂直な時間的測地線である．

共役点が存在すると，その前後を結ぶことによってより長い p と Σ を結ぶ曲線が存在してしまうのである．従って，最長曲線は共役点を持つことはできない．同様の定理が光的測地線に対しても成り立つ．

ここでアインシュタイン方程式の役割についてコメントしておこう．式 (7.10) から式 (7.21) に移る際に，リッチテンソルをエネルギー・運動量テンソルに読み替えたところでアインシュタイン方程式は使われただけである．リッチテンソルに対する条件を物質の条件に読み替えるのに使われたのである．この操作が，アインシュタイン方程式からずれた場合，読み替えが非自明となり，一般には共役点に関する定理が成り立たなくなる．

7.2.2　特異点定理

厳密解で見たように，特異点では曲率といった幾何学量や密度といった物理量が発散している．その点を超えて時空を延ばすことができない時空の“境界”である．一般論ではこの境界という性質を重視し，特異点は次のように定義さ

れる．まずそのために**測地的に完備**という概念の導入を行おう．

定義：有限なアフィンパラメータの長さを持つすべての測地線は延長可能であるような時空を測地的に完備であると呼ぶ．

なんらかの理由で途中で終わっているような測地線があったときに，その先に測地線を繋げて延ばすことができるときに測地的に完備であるということになる．逆に，途中で終わっているような測地線でその先に延ばすことができないようなものが存在する場合，完備ではないといい，そのような測地線が存在する時空は特異点を持つという（**時空特異点の定義**）．

このように時空の特異点を測地線が延ばせるか否かで判定することにする．次の定理が成り立つ．

定理（宇宙の特異点定理）[*1]：アインシュタイン方程式に従い，強いエネルギー条件を満足する大域的に双曲的な時空 (M, g) を考える．そのコーシー面 Σ の過去向きの時間的単位法線ベクトルに関する外的曲率 $K|_{\Sigma}$ が $K|_{\Sigma} \leq C < 0$ を満たすとき，コーシー面から過去向きに垂直に発する時間的で $3/|C|$ よりも長い時間的曲線は存在しない．特に，すべての過去向きの時間的測地線は完備でない．

証明　背理法で証明する．まず $K|_{\Sigma}$ が Σ に垂直な過去向きの時間的測地線束の膨張率 $\theta|_{\Sigma}$ に一致することに注意する．$3/|C|$ よりも長い時間的曲線 λ が存在したとする，すると，λ 上の $3/|C|$ よりも過去の点 p が存在する．そして，時空が大域的に双曲的であるから，前小節の定理より点 p と Σ を結ぶ最長の時間的測地線 γ が存在し，γ は点 p と Σ の間に共役点を持たない．一方で，$K|_{\Sigma} \leq C < 0$ を満足しているため，必ず $3/|C|$ 以内に共役点を持たねばならない．これは矛盾である．従って，$3/|C|$ よりも長い時間的曲線は存在しないことが分かった．証明終わり．

この定理の意味について考えよう．$K|_{\Sigma} \leq C < 0$ は面 Σ の体積が過去向きに減少していることを意味している．従って，未来向に向かって膨張していることを表している．つまりこの定理は膨張宇宙における初期特異点の存在を予言している．この定理では時間一定面の対称性について何の仮定も置いていない．かつて一様等方宇宙の厳密解で存在する初期特異点の発生は強い対称性を課したことによる結果であるとする主張があった．例えば一様非等方宇宙では初期特異点は消えるのではないかと思われていた時代があった．この論争に終止符を打ったのが特異点定理なのである．

---

*1 参考図書 [1] の定理 9.5.1.

この特異点定理の重力崩壊版も存在する．その場合，素朴には重力が強くなっている状況を判別する条件がほしいであろう．そして，その条件が満たされていれば，特異点が発生することが結論されることになっていてほしい．重力が強い様子を表すために，**捕獲面**の概念を導入しよう．そこでまず重力がない平坦な時空を考察してみよう．簡単のため，半径が一定のある2次元球面を用意し，そこから外向きと内向きに放たれる光の束の断面積の変化具合を観察してみる．すると外向きの束の面積は増大し，内向きは減少することは容易に想像できる．これが重力が無い場合である．重力があるとどうなるであろうか．引力によって外向きの光の束の断面積の変化のスピードが落ちそうであろう．極端には光が放たれるや否や断面積が減少する場合があるかもしれない．これが捕獲面の概念を導く．つまり，外側に放った光であるにもかかわらず，その束の断面積がいきなり減少しはじめる．

定義：境界のないコンパクトな2次元面 T で，T から放たれる未来向きで外向きのすべての光的測地線の束の膨張率 θ が負の場合，T を**捕獲面**と呼ぶ．

捕獲面が存在すれば，特異点が発生することを示そう．

定理（ブラックホール特異点定理）[*2]：アインシュタイン方程式に従い，光的エネルギー条件を満足し，非コンパクトなコーシー面 Σ を持つ大域的に双曲的な時空 (M, g) を考える．ここで，もし捕獲面 T が存在するならば，アフィン長が $2/|\hat{\theta}_0|$ よりも短い延長不可能な光的測地線が存在する．ここで $\hat{\theta}_0$ は T から未来向きに垂直に出た光的測地線束の膨張率 $\hat{\theta}|_T$ の最小値である．

証明　背理法で証明する．即ち，T から出るすべての光的測地線は $2/|\hat{\theta}_0|$ よりもアフィン長が長いとする．さて，過去向きの時間的曲線によって T と結ばれる点の全体の集合を $I(T)$ と書こう．そして，$I(T)$ の境界 $\dot{I}(T)$ 上の光的測地線の振る舞いを考えると，共役点の存在から $\dot{I}(T)$ はコンパクトである．さらに，$\dot{I}(T)$ には端がない．次に，時空が大域的に双曲的であるから，時間的曲線の束を使って，$\dot{I}(T)$ からコーシー面 Σ への写像を考えよう．$\dot{I}(T)$ の Σ への像 A はコンパクトで，Σ は非コンパクトであるから，A は境界を持つことになる．しかし，これは $\dot{I}(T)$ が端を持たないことと矛盾する．従って，すべての光的測地線は $2/|\theta_0|$ よりもアフィン長が長いとした仮定が悪かった．証明終わり．

定理の条件において非コンパクトなコーシー面の存在を課している．これは漸近的に平坦な場合を想定している．

[*2] R. Penrose, Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965). 捕獲面の存在をここでは仮定しているが，ある状況下で物質が十分コンパクトな領域にあれば，捕獲面が存在することが示されている [R. Schoen and S.-T. Yau, Commun. Math. Phys. **90**, 575 (1983)].

本節の特異点定理では強い仮定を課した．これらのいくつかは緩和することができる．ただし，それらの場合の証明は複雑となるので割愛した．詳しくは参考図書の [2] を参照してほしい．

特異点定理は特異点の存在を予言するが，その性質について何らの予言もない．曲率は発散しているのか，いつどこで発生しているのか．しかし，古典一般相対性理論がたどりついたこの帰結の衝撃は大きい．一般相対性理論はそれ自身の破綻を予言するのである．この問題は量子重力理論が解決してくれると信じられている．

7.3 ブラックホール

7.3.1 重力崩壊と宇宙検閲仮説

特異点定理から重力崩壊の結果として特異点が生成される．定理の条件に捕獲面の存在を課しているが，これは強い重力場中で期待される．そして特異点は遠方の観測者からは見えないブラックホールになっていると考えられる．ブラックホールの表面は事象の地平面と呼ばれている．このように重力崩壊の結果として発生した特異点は事象の地平面に囲まれ，遠方の観測者から見えないと仮定し宇宙物理学的な議論が展開される（**宇宙検閲仮説**）．裸の特異点は宇宙の検閲官が厳しく取り締まって，その存在を許さないというわけである．素朴な宇宙検閲仮説に対しては反例がすでに知られているので，より正確には種々の条件を課す必要があるが，いずれにせよ仮説の段階にある．以下では裸の特異点はないものとして議論を進めることとする．仮に裸の特異点があるとすれば，そこでの境界条件は任意となり，その未来について物理的な予言が不可能となる．

以下の議論の多くはホーキングによってなされた．

7.3.2 ブラックホールの定義と性質

まず一般の時空におけるブラックホールと事象の地平面の定義を行っておこう．

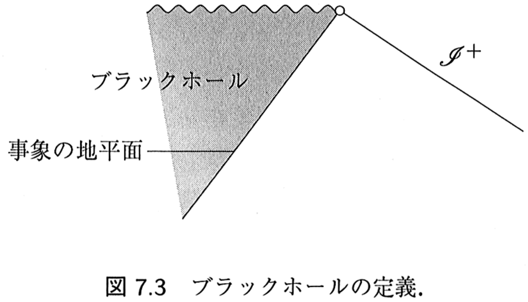


図 7.3 ブラックホールの定義．

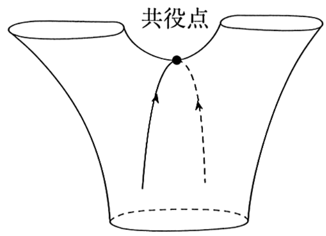


図 7.4　ブラックホールは分岐しない.

定義（ブラックホールと事象の地平面）：ブラックホールは無限遠方の観測者から見えない時空領域として定義される*3．その境界が事象の地平面である．

事象の地平面にはその定義から直ちに分かるいくつかの重要な性質がある．なお，事象の地平面は3次元的な多様体であることに注意する（D 次元時空の場合は，$D-1$ 次元である）．また，観測者から「見えない」をより正確にいうと，光で見えないわけであるから，その面は光的でしかも光的測地線によって稠密に占められていることが分かる．次に，事象の地平面にはその定義から，未来に終点を持たないことが分かる．終点を持つということは，事象の地平面が途中で終わっていることを意味するが，それはその終点から無限遠方の観測者に光が届くことを意味している．これは定義に反する．従って，事象の地平面は終点を持たない．また，事象の地平面（の断面）は分岐しない．もし図 7.4 のように分岐したとすると，事象の地平面上を走る光的測地線で共役点を持ってしまうものが発生する．共役点が発生するとその前後で光的測地線を微小変形し，時間的曲線によって無限遠方の観測者と結ぶことができることがわかる．これもおかしい．従って，分岐することはあり得ない．また，分岐は終点の存在を示唆している．このように，

事象の地平面は光的測地線束によって張られる3次元光的曲面であり，未来に終点を持たず，また分岐しない

という重要な性質を持つ．分岐しないというのは分裂しないことを意味している．

7.3.3　面積増大定理

ブラックホールが物質などを吸い込む一方であるという現象を反映し次の有

---

*3 正確にはこの定義では漸近的に平坦な時空を考え，未来の光的無限遠方での観測者が存在することを仮定している．しかし，実際の宇宙ではどうだろうか．厳密な意味で遠方の観測者など存在するのであろうか．ここでは近似的に漸近的に平坦な時空として扱えるものとする．なお，光的無限遠方でなくても漸近的にド・ジッター時空や漸近的に反ド・ジッター時空のように無限遠方が明確に存在する場合，ブラックホールの定義は可能である．

名な面積増大則が成り立つ．

定理（面積増大則）[*4]：光的エネルギー条件を満たす漸近的に平坦は時空において事象の地平面の断面の面積は増大するか変化しない[*5]．

証明　ブラックホールの分裂は許されないが，合体することは許されている．このとき事象の地平面上の測地線は過去に終点を持ちうる．まず，簡単のためにこのような合体する場合は考えないことにしよう．つまりブラックホールが一つだけの場合を考えよう．この場合，事象の地平面が光的測地線束で生成されていることを思い出すと，その束の膨張率が非負となっていることを示せばよい．これを示すのに背理法を用いる．つまり，事象の地平面のある点 p において負になるとする．すると，測地線束はその点 p の有限アフィン時間以内に共役点を持ってしまう．共役点を持ってしまうとその点の前後に事象の地平面の外と中を結ぶ時間的曲線が存在することになる．つまり，ブラックホールの中が外から見えてしまっているのである．言い方を変えると，事象の地平面の共役点近傍で未来向きの測地線に対して終点が発生していることを表している．これはおかしい．原因はある点で光的測地線束の膨張率を負としたことにある．従って，膨張率は非負であることが示され，一つのブラックホールの場合は面積が増大することが分かった．

次にブラックホールが合体する場合を考えよう．このとき合体後の事象の地平面領域を走る光的測地線の中で過去に終点を持つものがある．未来に向かって考えるならば，合体する場合は光的測地線の数は増える．数が増えれば面積もその分増える．このように合体するときにも面積を増える．証明終わり．

ここで面白い事実が分かっている．上の証明の中で「ブラックホールの合体」といったが，これは時間一定面の取り方に強く依存する．合体するような場合，光的測地線には過去に終点を持つと述べた．この終点は特別な対称性が課されない限り，線上に分布したり，面上に分布したりするであろう．球対称性を課したときは，その対称性から終点は一つだけである．さて，この終点の集合が連続的に分布している場合，それが因果的な曲線で結ばれることはないであろう．仮に結べたとすると，事象の地平面の中から外に因果的曲線で結ばれてしまうからである．よって時間一定面を上手にとることによって終点のすべての

[*4] 参考図書 [2] 参照．この定理は宇宙項がある場合や高次元時空でも成り立つ．

[*5] 様々な考察によりブラックホール熱力学が成り立つと考えられており，エントロピーは面積に比例すると思われている．この面積増大則はまさにエントロピー増大則と対応している．エントロピー増大則の証明は存在しないが，面積増大則の証明はここで説明するように存在する．この意味でブラックホールは非平衡系に対して興味深い例を提供している．なお，非平衡系の等温過程に対してエントロピー増大則に対応し，またそれを導くある等式がジャルジンスキーによって示されている [C. Jarzynski, Phys. Rev. Lett. **78**, 2690 (1997)].

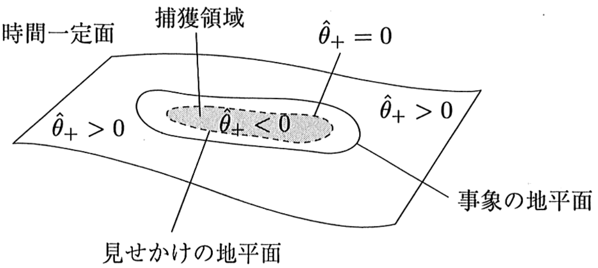


図 7.5　捕獲領域，見かけの地平面．

集合が同時刻面で現れるようにできる．そのあとの時間発展では初めから一つのブラックホールとして出現する．要するに，ブラックホールがいくつあるかは時間一定面の取り方に依存してしまうという一見奇妙な結論を得ることになる*6.

7.4　見かけの地平面

ブラックホールの境界であるところの事象の地平面は時空の大域的な構造が既知であることを前提としている．しかし，これでは応用上不都合なことが多々ある．そこでそれに対応する準局所的に定義される**見かけの地平面**の導入を行い，その性質を明らかにしておこう．

7.4.1　見かけの地平面の定義

まず，見かけの地平面の定義を行う．そのために捕獲面の集合全体を考え，その領域を**捕獲領域**と呼ぶことにしよう．そして，その境界を考えると，その境界から発する未来向きの光的測地線束の膨張率 $\hat{\theta}$ はゼロになる．このような面を**見かけの地平面**と呼ぶ．

光的エネルギー条件を満たしている時空では，膨張率が事象の地平面上で非負であることからも分かるように，次の性質が成り立つ．

見かけの地平面や捕獲面はブラックホール内に存在する*7.

7.4.2　見かけの地平面方程式

時間発展を追うことを念頭に置いて見かけの地平面を決める式を書き下してみよう．局所的には外向きの光的ベクトル n_+^a は時間方向の単位ベクトル t^a とそれに垂直な空間方向の単位ベクトル r^a の和に比例している．

$$n_+^a = f(t^a + r^a). \tag{7.30}$$

*6 これは椎野によって示された [M. Siino, Phys. Rev. D **58**, 104016 (1998)].

*7 高次元時空や宇宙項が存在する時空でも成り立つ．

ここで $t^a t_a = -1$, $r^a r_a = 1$ であり，$n_+^a n_{+a} = 0$ である．f はある正の関数．t^a と r^a に垂直な2次元面の計量は

$$h_{ab} = g_{ab} + t_a t_b - r_a r_b \tag{7.31}$$

で与えられる．実際に $h_{ab}t^a = 0$, $h_{ab}r^a = 0$ が成り立っていることが直ちに分かる．よって，見かけの地平線の満たす式は

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= h^{ab}\nabla_a n_{+b} = fh^{ab}\nabla_a(t_b + r_b)\\ &= f(h^{ab}\nabla_a t_b + h^{ab}\nabla_a r_b)\\ &= f\left(K + K_{ab}r^a r^b + k_a{}^a\right) = 0\end{aligned} \tag{7.32}$$

となる．ここで K_{ab} は t^a に垂直な面の外的曲率，K はそのトレース，$k_a{}^a$ は t^a に垂直な面内の r^a に垂直な面の外的曲率 $k_{ab} = h_a^c h_b^d \nabla_c r_d$ のトレース部分である．

時空の時間発展を一度解いておくと K_{ab} はすでに求まっているという立場をとることができる．また，見かけの地平面をある関数 φ の一定面とすると，その法線ベクトルはその勾配で書ける ($r^a \propto \nabla^a \varphi$)．すると $k_a{}^a \propto \Delta\varphi$ であるから $\hat{\theta} = 0$ はおおよそ

$$\Delta\varphi = S(x^i) \tag{7.33}$$

の構造を持つ楕円型の方程式になる．Δ は $t=$ 一定面のラプラシアン演算子，$S(x^i)$ はソース項である．これを解くことによって，見かけの地平面の有無，位置を特定することができる．

7.4.3 見かけの地平面の因果的性質とトポロジー

見かけの地平面はその定義から次の性質を満たすことが分かる[*8]．時空がアインシュタイン方程式を満足し，エネルギー条件が成り立つ場合，

(i) 見かけの地平面の集合は空間的に広がっている．

(ii) 見かけの地平面は時空次元が4の場合，2次元球面である．

が成り立つ．各々詳しく見ていく．

(i) 未来向きの二つの光的方向 n_+^a と n_-^a をとり，見かけの地平面の系列の接ベクトルを s^a とする．n_+^a は外向き，n_-^a は内向きであり，この設定から $n_+^a n_{-a} < 0$ である[*9]．すると，一般には

---

*8 ヘイワードの方法を採用する [S. A. Hayward, Phys. Rev. D **49**, 6467 (1994)]．この方法には仮定が多いものの，取り扱いが容易であるため厳密な証明を必要と感じない読者には最適である．

*9 $f_\pm$ をある正の関数としたとき，未来向きの光的ベクトルは $n_\pm^a = f_\pm(t^a \pm r^a)$ と書ける．具体的に内積をとると，$n_+^a n_{-a} = -2f_+ f_- < 0$ となることが分かる．

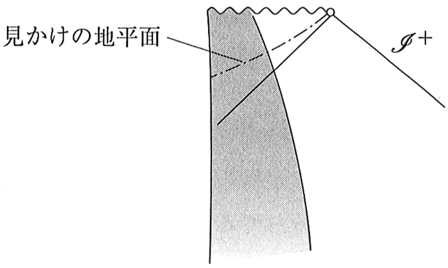


図 7.6　見かけの地平面の因果的性質.

$$s^a = \alpha n_+^a + \beta n_-^a \tag{7.34}$$

の線形結合で書ける．ここで α, β は関数で，$\alpha > 0$ と一般にとることができる．さて，見かけの地平面に沿って $\hat{\theta}_+ = h^{ab}\nabla_a n_{+b} = 0$ であったから

$$s^a \nabla_a \hat{\theta}_+|_{\rm AH} = \alpha n_+^a \nabla_a \hat{\theta}_+|_{\rm AH} + \beta n_-^a \nabla_a \hat{\theta}_+|_{\rm AH} = 0 \tag{7.35}$$

が成り立つ．ライチャウドリ方程式から見かけの地平面上で $n_+^a \nabla_a \hat{\theta}_+ < 0$ となることを思い出そう．また，見かけの地平面 ($\hat{\theta}_+ = 0$) は捕獲面の集合の境界であるからその内側には必ず捕獲面 ($\hat{\theta}_+ < 0$) があるので，$n_-^a \nabla_a \hat{\theta}_+|_{\rm AH} < 0$ が成り立つ．よって，式 (7.35) から

$$\beta < 0 \tag{7.36}$$

となることが分かる．結局 s^a の内積は

$$s^a s_a = \alpha\beta n_+^a n_{-a} > 0 \tag{7.37}$$

となり空間的であることが分かる．よって，見かけの地平面の集合は空間的に広がっている．

(ii)　次にトポロジーについてみてみよう．そのために一般的ではないものの議論の要点を掴むために見かけの地平面近傍で計量が次のよう書けるとしよう．

$$ds^2 = -2e^{2f} du dv + h_{AB} dx^A dx^B. \tag{7.38}$$

そして，$n_+ = \partial_u$，$n_- = \partial_v$ と選び，膨張率を

$$\hat{\theta}_\pm = h^{AB} \nabla_A n_{\pm B} \tag{7.39}$$

と定義することにしよう．u, v はアフィンパラメータではないが，見かけの地平面上に限れば以下の議論に影響はない[*10]．さて，アインシュタイン方程式の (u, v) 成分

*10　k^a をアフィンパラメータで書かれた接ベクトルとしたとき，一般には $k^a = \alpha n_+^a$ の関係がある．α は向きを同じにとっているため，正の関数である．各々の接ベクトルで定義された測地線束の膨張率を $\hat{\theta}_{(k)}, \hat{\theta}_{(n_+)}$ と書くと，その間には $\hat{\theta}_{(k)} = \alpha \hat{\theta}_{(n_+)}$ の比例関係がある．従って，どちらでみても見かけの地平面上で $\hat{\theta}_{(k)} = \alpha \hat{\theta}_{(n_+)} = 0$.

$$R_{ab}n_+^a n_-^b + \frac{1}{2}e^{2f}R = 8\pi T_{ab}n_+^a n_-^b \tag{7.40}$$

に着目してみよう．なお (u,u) や (v,v) 成分からは各々 $\hat{\theta}_+(\hat{\theta}_-)$ の $u(v)$ 方向の時間発展の方程式であるところのライチャウドリ方程式が得られたのであった．今はどんな式が得られるであろうか．具体的に計量を代入にしてリッチテンソルの計算を行ってみよう[*11]．まず上式の左辺は

$$\frac{1}{2}e^{2f}R_{AB}h^{AB} \tag{7.41}$$

となるので

$$R_{AB} = R^u{}_{AuB} + R^v{}_{AvB} + R^C{}_{ACB} \tag{7.42}$$

だけ計算すればよいことが分かる．各項は

$$\begin{aligned} R^u{}_{AuB} = R^v{}_{AvB} = &\frac{1}{2}e^{-2f}\partial_u\partial_v h_{AB} - \mathcal{D}_A\mathcal{D}_B f - \mathcal{D}_A f\mathcal{D}_B f \\ &- \frac{1}{4}e^{-2f}\partial_u h_{CB}\partial_v h_{AD}h^{CD}, \end{aligned} \tag{7.43}$$

$$\begin{aligned} R^C{}_{ACB} = {}^{(2)}R_{AB} &+ \frac{1}{4}e^{-2f}h^{CD}(\partial_v h_{CD}\partial_u h_{AB} + \partial_u h_{CD}\partial_v h_{AB}) \\ &- \frac{1}{4}e^{-2f}h^{CD}(\partial_u h_{AC}\partial_v h_{BD} + \partial_v h_{AC}\partial_u h_{BD}) \end{aligned} \tag{7.44}$$

となる．$\mathcal{D}_A$ は h_{AB} の共変微分である．リーマンテンソルの計算でクリストッフェル記号が

$$\begin{aligned} &\Gamma^u_{AB} = \frac{1}{2}e^{-2f}\partial_v h_{AB}, \Gamma^u_{uu} = 2\partial_u f, \Gamma^u_{Au} = \partial_A f, \\ &\Gamma^A_{Bu} = \frac{1}{2}h^{AC}\partial_u h_{CB}, \Gamma^A_{Bv} = \frac{1}{2}h^{AC}\partial_v h_{CB}, \\ &\Gamma^C_{AB} = \frac{1}{2}h^{CD}(\partial_A h_{DB} + \partial_B h_{DA} - \partial_D h_{AB}) =: {}^{(2)}\Gamma^C_{AB} \end{aligned} \tag{7.45}$$

それ以外はゼロとなることを用いた．結局，$R_{ab}h^{ab}$ は

$$R_{ab}h^{ab} = {}^{(2)}R + \frac{1}{2}\hat{\theta}_+\hat{\theta}_- - 2\mathcal{D}^2 f - 2(\mathcal{D}f)^2 + e^{-2f}\partial_v\hat{\theta}_+ \tag{7.46}$$

となる．ここで $\mathcal{D}^2 f = h^{AB}\mathcal{D}_A\mathcal{D}_B f$，$(\mathcal{D}f)^2 = h^{AB}\mathcal{D}_A f\mathcal{D}_B f$ である．式 (7.40) を用いて，左辺をエネルギー運動量テンソルに書き直したあとで配置をすこし変えると

$$\begin{aligned} {}^{(2)}R = &-\frac{1}{2}\hat{\theta}_+\hat{\theta}_- + 2\mathcal{D}^2 f + 2(\mathcal{D}f)^2 - e^{-2f}\partial_v\hat{\theta}_+ \\ &+ 16\pi G e^{-2f}T_{ab}n_+^a n_-^b \end{aligned} \tag{7.47}$$

が得られる．これが見かけの地平面のトポロジーを決める重要な式である．

ここで式 (7.47) を見かけの地平面上（$\hat{\theta}_+ = 0$，$\partial_v\hat{\theta}_+|_{\mathrm{AH}} < 0$ を満たしてい

[*11] ガウスコダッチ分解を用いることで，具体的な計算を行うことなく式 (7.46) を導くこともできる．しかし，今の計量の形では直接計算したほうが簡単である．

る！）で評価し，両辺を見かけの地平面上で積分しよう．ただし，見かけの地平面は境界のないコンパクトな空間であるとする．すると

$$\int_{S_{\rm AH}} dS^{(2)}R = \int_{S_{\rm AH}} dS\Big[2(\mathcal{D}f)^2 - e^{-2f}\partial_v\hat{\theta}_+ + 16\pi G e^{-2f}T_{ab}n_+^a n_-^b\Big] \tag{7.48}$$

となる．ここで $\mathcal{D}^2 f$ は表面積分に置き換わるが，$S_{\rm AH}$ に境界は存在しないためゼロとなることを用いた．この式で右辺を見ると，エネルギー条件 $T_{ab}n_+^a n_-^b \geq 0$ を課し，見かけの地平面で $\partial_v\hat{\theta}_+ < 0$ が成り立つことに注意すると，右辺が正になることが分かる．つまり，左辺が正になる．

$$\int_{S_{\rm AH}} dS^{(2)}R > 0. \tag{7.49}$$

これがトポロジーに強い制限を与える．事実，2 次元リッチスカラーの積分について有名なガウス・ボネの定理が成り立つ[*12]．

$$\int_S dS^{(2)}R = 8\pi(1-g). \tag{7.50}$$

ここで g はジーナス（穴）の数である．従って

$$1 - g > 0 \tag{7.51}$$

が課されることになる．$1 > g$ であるから，結局

$$g = 0 \tag{7.52}$$

だけが，つまり 2 次元球面の場合だけが許されることになるのである[*13]．

ここで課したエネルギー条件 $T_{ab}n_+^a n_-^b \geq 0$ についてすこし吟味してみよう．$T_{ab}n_+^a n_-^b \sim T_{tt} - T_{rr}$ となるから，$T_{tt} \geq T_{rr}$ であれば満たされる．これは普通の物質の場合は満たされる．しかし，宇宙項がある場合はどうだろうか．簡単のために宇宙項だけがある場合を考えよう．$T_{ab}n_+^a n_-^b = -\Lambda g_{ab}n_+^a n_-^b = \Lambda e^{2f}$ となる．よって，正の宇宙項のある時空においても見かけの地平面は 2 次元球面に限られることが分かる．一方で負の宇宙項の場合は，そのような制限はなくなる．実際に，球面以外の解を構成することができる．

時空が定常の場合，ブラックホールの面積は変化しない．これは事象の地平面上で光的測地線束の膨張率がゼロになることを意味する．従って，次の命題が成り立つ．

命題：時空が定常の場合，ブラックホールの事象の地平面と見かけの地平面は一致する．

---

*12 高次元では成り立たないため，以下の議論は高次元には適用されない．このような事情により，高次元時空では多様な形のブラックホールが許されることになる．「ホール」という名称はそこではもはやふさわしくなく，ブラックオブジェクトと呼ばれる．

*13 計量の形が式 (7.38) のように書ける場合に限っていたが，一般の場合は $\mathcal{D}_A f$ はベクトル τ_A で書くべきであるが，その場合でも同じ結論が導かれることが分かる．

この命題によって，定常時空において見かけの地平面は事象の地平面のトポロジーと一致する．

命題：4 次元時空において定常ブラックホールの事象の地平面の断面のトポロジーは見かけの地平面と同じく 2 次元球面に限られる[*14]．

一般の動的な時空において，面積増大則とそのサイズが有限であることを考慮すると増加はいずれ止まり，面積はいつか一定に落ち着くであろう．従って，時間の経過とともに $\hat{\theta}$ はゼロの値に漸近する．これは事象の地平面が見かけの地平面に時間経過とともに一致することを意味している．まさに時空が定常に落ち着く予想を支持する性質となっている．

7.5 正エネルギー定理

一般相対性理論における古典的時空の安定性は自明でない．正則な線形摂動の範囲で，そのエネルギーの正定値性は簡単に示すことができる．しかし，非線形領域ではどうだろうか．その答えは相対論が提唱されてから約 65 年もの歳月を必要とした．ここでは特殊な超曲面上（時間対称超曲面）に限った場合の証明と，ウィッテンによるスピノールを用いた方法を紹介する[*15]．本節では時空の次元は 4 とする．

7.5.1 逆平均外的曲率流を用いた証明

正エネルギー定理の完全な証明がなされるまでに先人によって多くの努力が注ぎ込まれ，ある仮定下では成功を収めていた．この記念碑的な成功を割愛するのはしのび難く，本小節でその概略の紹介を行いたい．この手法は後で述べるペンローズ不等式の証明（7.5.3 節参照）に応用される．

この証明では外的曲率のトレースがゼロ ($K^i_i = 0$) の時間一定面に限る．ここでのこの特別な面を採用するご利益はエネルギー密度が非負の場合，その面（以下では Σ と呼ぶ）の 3 次元リッチスカラー曲率が非負になることがハミルトニアン拘束条件から分かることである．実際に

$$^{(3)}R = 16\pi G T_{ab} n^a n^b + \tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab} \geq 0. \tag{7.53}$$

ここで n^a は Σ の単位法線ベクトル，$\tilde{K}_{ab}$ は外的曲率のトレースレス部分である．

さて，ここで Σ をパラメータ y で球面と同相な 2 次元面で葉層化することを考

---

*14 定常ではないブラックホールの断面のトポロジーへの制限ではないことに注意する．定常な場合についての定理である．参考図書 [2] 参照．

*15 シェーンとヤウによる証明が先である [R. Schoen, S. T. Yau, Comm. Math. Phys. **79**,81, 231 (1981)]．高次元への拡張はウィッテンによるものが容易である．

えよう．そして，$y=0$ で 1 点になるとし，$y=\infty$ で無限大の半径を持つ球面に一致するとする．時空の計量を g_{ab} とすると，Σ 上の計量は $q_{ab}=g_{ab}+n_a n_b$．Σ 上の共変微分を D_a と書くことにしよう．次に，ここで各 $y=$ 一定面を S_y と呼び，その面積を $S(y)$ と書き次のような関数を定義する[*16]．

$$E(y) = \frac{S^{1/2}(y)}{64\pi^{3/2}G}\int_{S_y}(2^{(2)}R-k^2)dS \tag{7.54}$$

$$=: \frac{S^{1/2}(y)}{64\pi^{3/2}G}f(y). \tag{7.55}$$

ここで k は Σ における S_y の外的曲率のトレース部分である．後に見るように $E(y)$ は $y=0$（"原点"）でゼロ，$y=\infty$（無限遠方）で ADM エネルギーに一致することが分かる．さらに，$E(y)$ の y についての単調性を示すこともできる．これらから，$E(y)$ の正定値性は直ちに示すことができる．即ち

$$0=E(0)\le E(\infty)=M. \tag{7.56}$$

以下，上で述べた $E(y)$ の性質を示しておこう．具体的な計算も必要になるので，S_y に関する幾何学量を明記しておくことにしよう．S_y の外向きの単位法線ベクトルを r^a とすると，S_y 上の計量は $h_{ab}=q_{ab}-r_a r_b$ である．また，S_y 上の共変微分を $\mathcal{D}_a$ と表記することにしよう．すると S_y の外的曲率 k_{ab} は $k_{ab}=h_a^c D_c r_b$ で定義される．さらに，ガウス・ボネの定理から

$$f(y)=16\pi-\int_{S_y}k^2 dS \tag{7.57}$$

と書けることに注意する．

以下の議論では簡単のために r^a と y 軸は同じ方向を向いているとしよう．即ち，シフトベクトルはないものとする．このときラプス関数を φ とすると，$r^a=\varphi^{-1}(\partial_y)^a$ と書ける．シフトベクトルを残しておいたとしても最終結果に変更はない．

$E(y)$ の性質を調べよう．$y=0$ 近傍で $k=\frac{2}{r}+O(r^0)$ とふるまうため，$f(y)$ の第 1 項と k の主要項からの寄与は相殺し，$f(y)=O(r)$ とふるまう．$S(y)=O(r^2)$ であるから，$E(y)=O(r^2)$ であることが分かる．ここで r は $y=0$ 近傍で定義されている動径座標である．一方，無限遠方で $k=2/r\times(1-GM/r)+O(1/r^3)$ のようにふるまうため，やはり 16π と k の主要項は相殺するが，$f(y)=8M/r^3\times 4\pi r^2+O(r^{-2})=32\pi GM/r+O(r^{-2})$ となる．よって，$E(y)=M+O(1/r)$ となる．次に $E(y)$ の単調性を示そう．まずは $f(y)$ の微分をとってみよう．すると

[*16] ホーキングの準局所質量と呼ばれている [S. W. Hawking, J. Math. Phys. **9**, 598 (1968)].

$$\frac{df(y)}{dy} = -2\int k(dk/dy)dS - \int k^2 k\varphi dS$$
$$= -2\int k\Big[-\mathcal{D}^2\varphi - \frac{1}{2}{}^{(3)}R\varphi + \frac{1}{2}{}^{(2)}R\varphi$$
$$- \frac{1}{2}(k^2 + k_{ab}k^{ab})\varphi + \frac{1}{2}k^2\varphi\Big]dS \tag{7.58}$$

となる．ここで

$$r^a D_a k = -\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi - \frac{1}{2}{}^{(3)}R + \frac{1}{2}{}^{(2)}R - \frac{1}{2}(k^2 + k_{ab}k^{ab}) \tag{7.59}$$

となることを用いている（式 (4.40) 参照）．さて，さらに計算を進めるために

$$k\varphi = 1 \tag{7.60}$$

を満足する $y=$ 一定面による葉層化（逆平均外的曲率流と呼ばれている）をとれるとしよう．このような葉層化が存在することは証明されている．この条件式を用いると

$$\frac{df(y)}{dy} = \int \left(2\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi + {}^{(3)}R - {}^{(2)}R + \tilde{k}_{ab}\tilde{k}^{ab} + \frac{1}{2}k^2\right)dS$$
$$= -\frac{1}{2}f(y) + \int \left(2\varphi^{-2}(\mathcal{D}\varphi)^2 + {}^{(3)}R + \tilde{k}_{ab}\tilde{k}^{ab}\right)dS$$
$$\geq -\frac{1}{2}f(y). \tag{7.61}$$

一方で $k\varphi = 1$ から面積 $S(y)$ の微分をとると

$$\frac{dS(y)}{dy} = \int k\varphi dS = S(y) \tag{7.62}$$

となる．よって

$$\frac{d}{dy}(f(y)S^{1/2}(y)) \geq 0 \tag{7.63}$$

となり $E(y)$ の単調性，$dE(y)/dy \geq 0$ を示すことができた．

以上の議論から分かるように，またしてもガウス・ボネの定理を用いたためこの議論の高次元への安易な拡張は許されない．

7.5.2 スピノールによる証明

ウィッテンに従ってスピノールを用いて質量の正定値性を証明しよう*17．まずはブラックホールがない場合を考え*18，そのあとでブラックホールが存在する場合について考察する．

そこでまずスピノールについて基本的な事項をまとめておこう．ここではディラックスピノール ϵ を考える．スピノールに対する共変微分は

---

*17 オリジナルの文献は E. Witten，Comm. Math. Phys. **80**, 381 (1981)．小玉による日本語の解説もある [小玉英雄，素粒子論研究 **66**, 317 (1983)]．

*18 正確にはブラックホールがある場合でも，正則な時間一定面が存在し，“中心”で正則，遠方が漸近的に平坦であればこの小節の前半の議論は適用できる．

$$\nabla_\mu \epsilon = (\partial_\mu + \Gamma_\mu)\epsilon \tag{7.64}$$

と書ける．Γ_μ はスピン接続と呼ばれ

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{8} e^{\rho\hat{\alpha}} \nabla_\mu e^{\hat{\beta}}_\rho [\gamma_{\hat{\beta}}, \gamma_{\hat{\alpha}}] \tag{7.65}$$

である．$e^\mu_{\hat{\alpha}}$ は

$$e^\mu_{\hat{\alpha}} e^\nu_{\hat{\beta}} \eta^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = g^{\mu\nu} \tag{7.66}$$

を満足する擬正規直交基底であり，∇_μ はベクトルなどに作用する普通の共変微分である．$\gamma_{\hat{\mu}}$ はディラック行列で

$$\gamma_{\hat{\mu}}\gamma_{\hat{\nu}} + \gamma_{\hat{\nu}}\gamma_{\hat{\mu}} = 2\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \tag{7.67}$$

を満たしているものとする．ハットの付かない行列は $\gamma_\mu = e^{\hat{\nu}}_\mu \gamma_{\hat{\nu}}$ で定義されているものとする．詳細は 1.5.6 節を参照されたし．

正エネルギー定理の証明にはスピノール ϵ が次のウィッテン方程式を満たすことを課す．

$$\gamma^i \nabla_i \epsilon = 0. \tag{7.68}$$

添字の縮約が空間成分のみになっていることに注意する．

次にネスターテンソル $E^{\mu\nu}$ を導入する．

$$E^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\bar{\epsilon}\gamma^{\mu\nu\alpha}\nabla_\alpha \epsilon + \text{c.c.}). \tag{7.69}$$

ここで $\bar{\epsilon} = \epsilon^\dagger \gamma^{\hat{0}}$, $\gamma^{\mu\nu\alpha} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\alpha]}$, “$\dagger$” はエルミート共役である．このネスターテンソルを用いると，ADM エネルギーは

$$-P(\xi) = \frac{1}{8\pi}\int_{S_\infty} E^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} \tag{7.70}$$

と表されることを示す．ここで $\xi_\mu = -\bar{\epsilon}\gamma_\mu \epsilon$ である．ϵ がウィッテン方程式を満たしている場合，ξ^μ は時間的なベクトルになっていることを示すことができる．

さて，動径方向を 1，面上の方向に 2, 3（これらは角度座標に対応する）をとることにしよう．すると，上の積分は

$$\begin{aligned} \int_{S_\infty} E^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} &= 2\int_{S_\infty} E^{\hat{0}\hat{1}} dS_{\hat{0}\hat{1}} \\ &= -\int \left(\epsilon^\dagger \gamma^{\hat{1}} \gamma^{\hat{A}} \nabla_{\hat{A}} \epsilon + \text{c.c}\right) dS. \end{aligned} \tag{7.71}$$

ここでウィッテン方程式から

$$\gamma^{\hat{A}} \nabla_{\hat{A}} \epsilon = -\gamma^{\hat{1}} \nabla_{\hat{1}} \epsilon \tag{7.72}$$

が成り立つので，これを上の積分に代入すると

$$\int_{S_\infty} (\epsilon^\dagger \nabla_{\hat{1}} \epsilon + \text{c.c.}) dS = \int_{S_\infty} (\epsilon^\dagger \nabla_{\hat{i}} \epsilon + \text{c.c.}) dS^i \tag{7.73}$$

と書き直すことができる．以下ではウィッテン方程式を用いて変形を行っていく．その際に，被積分関数については無限遠方での振る舞いに留意し，積分に残る項のみ書いていく．

ウィッテン方程式の解に対して，遠方で定数スピノール ϵ_0 に漸近するものを考えよう．すると，被積分関数は

$$\epsilon^\dagger \nabla_1 \epsilon = \epsilon_0^\dagger \partial_1 \epsilon_1 + \epsilon_0^\dagger \Gamma_1 \epsilon_0 \tag{7.74}$$

となる．またウィッテン方程式に $\epsilon_0^\dagger \gamma_{\hat{1}}$ を作用させて主要項のみ残すと

$$\epsilon_0^\dagger \partial_1 \epsilon_1 + \epsilon_0^\dagger \gamma_{\hat{1}} \gamma^{\hat{A}} \partial_A \epsilon_1 + \epsilon_0^\dagger \gamma_{\hat{1}} \gamma^{\hat{i}} \Gamma_{\hat{i}} \epsilon_0 = 0 \tag{7.75}$$

となる．ここで $A = 2, 3$ である．これを用いて式 (7.74) の右辺の $\epsilon_0^\dagger \partial_1 \epsilon_1$ を書き直すことができて

$$\epsilon^\dagger \nabla_{\hat{1}} \epsilon = \epsilon_0^\dagger (\Gamma_{\hat{1}} - \gamma_{\hat{1}} \gamma^{\hat{i}} \Gamma_{\hat{i}}) \epsilon_0 - \epsilon_0^\dagger \gamma_{\hat{1}} \gamma^{\hat{A}} \partial_A \epsilon_1 \tag{7.76}$$

となる．これを代入して無限遠方での面積分を行うと

$$\int E^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} = \int_{S_\infty} \epsilon_0^\dagger (\Gamma_{\hat{i}} - \gamma_{\hat{i}} \gamma^{\hat{j}} \Gamma_{\hat{j}}) \epsilon_0 dS^{\hat{i}} + \text{c.c.} \tag{7.77}$$

となる．角度方向の微分項を含む項は寄与しないことが示される．

次に，Γ^i の変形をすこし行っていこう．まず，その定義自身から

$$\Gamma_i = {}^{(3)}\Gamma_i + \frac{1}{2} K_{ij} \gamma^j \gamma^{\hat{0}} \tag{7.78}$$

となることが分かる．ここで K_{ij} は時間一定面の外的曲率である．${}^{(3)}\Gamma_i$ は

$${}^{(3)}\Gamma_i = -\frac{1}{8} e^{j\hat{k}\,(3)} \nabla_i e_j^{\hat{l}} [\gamma_{\hat{l}}, \gamma_{\hat{k}}] \tag{7.79}$$

で与えられ，$e_i^{\hat{k}}$ は時間一定面上の正規直交基底，${}^{(3)}\gamma_i$ は時間一定面上の共変微分である．これらを用いると式 (7.77) の被積分関数は

$$\Gamma_{\hat{i}} - \gamma_{\hat{i}} \gamma^{\hat{j}} \Gamma_j = {}^{(3)}\Gamma_{\hat{i}} - \gamma_{\hat{i}} \gamma^{\hat{j}\,(3)} \Gamma_{\hat{j}} + \frac{1}{2} (K_{\hat{i}\hat{j}} - \delta_{ij} K) \gamma^{\hat{j}} \gamma^{\hat{0}} \tag{7.80}$$

となる．第 1 項，第 2 項の計算を処理するために，無限遠方での計量を $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$ と書き，平坦な空間の正規直交基底を $\bar{e}_j^{\hat{i}}$ とすると，正規直交基底は $e_j^{\hat{i}} = \bar{e}_j^{\hat{i}} + h_j^{\hat{i}}/2 + \cdots$ と書ける．これを用いて ${}^{(3)}\Gamma_{\hat{i}}$ を書き下すと

$${}^{(3)}\Gamma_{\hat{i}} = \frac{1}{16} (\partial^j h_i^k - \partial^k h_i^j) [\bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_j] + \cdots \tag{7.81}$$

となる．ここで $\bar{\gamma}_i$ は平坦な空間でのディラック行列．以上よりネスターテンソルの面積分は

$$\int_{S_\infty} E^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \int \epsilon_0^\dagger (\partial_j h_i^j - \partial_i h_j^j) \epsilon_0 dS^i + \frac{1}{2} \int \epsilon_0^\dagger (K_{ij} - g_{ij} K) \gamma^j \gamma^{\hat{0}} \epsilon_0 dS^i + \Delta + \text{c.c.} \tag{7.82}$$

となる．ここで Δ を

$$\varDelta =: \frac{1}{8}\int \epsilon_0^\dagger\Big(\partial^j h_i^k[\bar\gamma_k,\bar\gamma_j] + \partial_k h^{kj}[\bar\gamma_i,\bar\gamma_j] - \partial^j h_k^k[\bar\gamma_i,\bar\gamma_j]\Big)\epsilon_0 dS^i \quad (7.83)$$

とおいたが，ガウスの定理を用いて背景空間であるところの平坦空間の体積積分に直すと

$$\begin{aligned}\varDelta &= \epsilon_0^\dagger\int\Big(\partial^i\partial^j h_i^k[\bar\gamma_k,\bar\gamma_j] + \gamma^i\gamma_k h^{kj}[\bar\gamma_i,\bar\gamma_j] - \partial^i\partial^j h_k^k[\bar\gamma_i,\bar\gamma_j]\Big)d^3x \\ &= 0 \end{aligned}\quad (7.84)$$

となり，積分に寄与しないことが分かる．結局

$$\begin{aligned}\int_{S_\infty} E^{\mu\nu}dS_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\int \epsilon_0^\dagger(\partial_j h_i^j - \partial_i h_j^j)\epsilon_0 dS^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\int\Big[\epsilon_0^\dagger(K_{ij}-g_{ij}K)\gamma^j\gamma^{\hat 0}\epsilon_0 + \mathrm{c.c.}\Big]dS^i \end{aligned}\quad (7.85)$$

とまとまることが分かる．この式の第 1 項がちょうど ADM エネルギーに，第 2 項が ADM 運動量に比例していることが分かる．結局，係数を合わせることによって

$$-P(\xi) = \frac{1}{8\pi G|\epsilon_0|^2}\int_{S_\infty} E^{\mu\nu}dS_{\mu\nu} \quad (7.86)$$

が ADM エネルギーと運動量の「和」になっており，これが ADM エネルギー/運動量を表していることが示せた．これで準備が整った．

次に ADM エネルギーの正定値性を示そう．そこで，ネスターテンソルの面積分で表現されている ADM エネルギーをガウスの定理を用いることによって（背景空間ではなく，元の空間の）体積積分に書き直してみる．

$$\int_{S_\infty} E^{\mu\nu}dS_{\mu\nu} = 2\int_\Sigma \nabla_\mu E^{\mu\nu}t_\nu d\Sigma. \quad (7.87)$$

ここで t_μ は Σ の単位法線ベクトルである．$E^{\mu\nu}$ の発散は

$$\begin{aligned}\nabla_\mu E^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\overline{\nabla_\mu\epsilon}\gamma^{\mu\nu\alpha}\nabla_\alpha\epsilon + \bar\epsilon\gamma^{\mu\nu\alpha}\nabla_\mu\nabla_\alpha\epsilon) + \mathrm{c.c.} \\ &= \overline{\nabla_\mu\epsilon}\gamma^{\mu\nu\alpha}\nabla_\alpha\epsilon + \frac{1}{2}G^\mu_\nu\xi_\mu \end{aligned}\quad (7.88)$$

となる．ここで $\xi^\mu = -\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon$ である．この結果とアインシュタイン方程式を用いることによって

$$\int_{S_\infty} E^{\mu\nu}dS_{\mu\nu} = 2\int_\Sigma\Big[\overline{\nabla_\mu\epsilon}\gamma^{\mu\nu\alpha}\nabla_\alpha\epsilon t_\nu + 4\pi G T_{\mu\nu}\xi^\mu t^\nu\Big]d\Sigma \quad (7.89)$$

となる．被積分関数の第 2 項は**主エネルギー条件**を課すことによって $T_{\mu\nu}\xi^\mu t^\nu \geq 0$，第 1 項はウィッテン方程式を用いることによって

$$\begin{aligned}\overline{\nabla_\mu\epsilon}\gamma^{\mu\nu\alpha}\nabla_\alpha\epsilon t^\alpha &= -(\nabla_i\epsilon)^\dagger\gamma^{ij}\nabla_j\epsilon \\ &= (\nabla_i\epsilon)^\dagger\nabla^i\epsilon - (\nabla_i\epsilon)^\dagger\gamma^i\gamma^j\nabla_j\epsilon \\ &= |\nabla_i\epsilon|^2 \geq 0 \end{aligned}\quad (7.90)$$

となり，いずれも非負．以上より，アインシュタイン方程式と主エネルギー条

件を課すことによって ADM エネルギーの正定値性を示すことができた．

特にエネルギーがゼロの場合

$$\nabla_i \epsilon = 0 \tag{7.91}$$

が成り立つ．よって

$$[\nabla_i, \nabla_j]\epsilon = \frac{1}{4} R_{ij\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} \epsilon = 0 \tag{7.92}$$

が成り立つ．ここで $\gamma^{\mu\nu} = \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}$．これから

$$R_{ij\mu\nu} = 0 \tag{7.93}$$

となる．時間一定面の変形を行えば，最初の添字に時間方向も混じることができるため，結局リーマンテンソルのすべての成分がゼロとなる．

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0. \tag{7.94}$$

従って，エネルギーゼロの時空はミンコフスキー時空となることが示された．

以上定理としてまとめておく．

定理（正エネルギー定理）：漸近的に平坦で主エネルギー条件を満足する時空において，その ADM エネルギーは非負である．特に，エネルギーがゼロの場合，またそのときに限り，時空はミンコフスキー時空となる．

ADM エネルギーは時間一定面で定義されているため，次のような定理も得ることができる．

定理（リーマニアン正エネルギー定理）：非負のリッチスカラー $({}^{(3)}R \geq 0)$ を持つ時間一定面上で定義される ADM 質量は非負である．また質量がゼロであるときに限り，時間一定面が平坦になる．

証明　先の証明で 4 次元の量を 3 次元に置き換えることによってなされる．そのために，ここでは

$$\gamma^i D_i \epsilon = 0 \tag{7.95}$$

を満たすスピノール ϵ を考える．ここで D_i はスピノールに対する 3 次元的な共変微分である．ここで

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} D^2 |\epsilon|^2 &= |D\epsilon|^2 + \epsilon^\dagger D^2 \epsilon \\ &= |D\epsilon|^2 + \frac{1}{4} {}^{(3)}R |\epsilon|^2\end{aligned} \tag{7.96}$$

の両辺を時間一定面で積分することによって

$$\frac{1}{2} \int (\epsilon^\dagger D_i \epsilon + \text{c.c.}) dS^i = \int \left[|D\epsilon|^2 + \frac{1}{4} {}^{(3)}R |\epsilon|^2 \right] d\Sigma. \tag{7.97}$$

左辺は先と同様の計算から m を質量とすると $8\pi Gm|\epsilon_0|^2$ となることが分かる．ここで $D^2 = D_i D^i$, $|D\epsilon|^2 = g^{ij}(D_i\epsilon)^\dagger D_j\epsilon$ である．結局

$$m = \frac{1}{8\pi G|\epsilon_0|^2}\int\left[|D\epsilon|^2 + \frac{1}{4}{}^{(3)}R|\epsilon|^2\right]d\Sigma. \tag{7.98}$$

従って，${}^{(3)}R \geq 0$ を課せば右辺が非負になることは明らかである．$m = 0$ のとき，第 1 項から $D_i\epsilon = 0$ が成り立つ．よって

$$[D_i, D_j]\epsilon = \frac{1}{4}{}^{(3)}R_{ijkl}\gamma^{kl}\epsilon = 0 \tag{7.99}$$

となり，${}^{(3)}R_{ijkl} = 0$ となることが示される．よって，時間一定面は平坦空間となる．証明終わり．

この定理は 7.6.2 節で用いられる．

さて，本節の最後にブラックホールがある場合を考えよう[*19]．この場合境界は無限遠方と見かけのホライズンの二つからなり，ネスターテンソルの積分は

$$\int E^{\mu\nu}dS_{\mu\nu} = \int_{S_\infty}(\epsilon^\dagger\nabla_{\hat{i}}\epsilon + \mathrm{c.c.})dS^i - \int_H(\epsilon^\dagger\nabla_{\hat{1}}\epsilon + \mathrm{c.c.})dS \tag{7.100}$$

となる．この量自体の正定値性の証明は先ほどと同じである．問題はこの式の右辺第 2 項の評価である．結果として見かけのホライズン上でスピノール ϵ に対して

$$\gamma^{\hat{1}}\gamma^{\hat{0}}\epsilon = \epsilon \tag{7.101}$$

を課すことによって，右辺第 2 項はゼロになることが示される．今からその詳細を見ていこう．計算の準備として，4 次元の微分を次のように分解しておこう．

$$\nabla_{\hat{i}}\epsilon = D_{\hat{i}}\epsilon + \frac{1}{2}K_{\hat{i}\hat{j}}\gamma^{\hat{j}}\gamma^{\hat{0}}\epsilon. \tag{7.102}$$

ここで D_i は時間一定面上の共変微分，K_{ij} はその外的曲率である．これを用いてウィッテン方程式を書き直すと

$$\begin{aligned}\gamma^i\nabla_i\epsilon &= \gamma^i D_i\epsilon + \frac{1}{2}K_{ij}\gamma^i\gamma^j\gamma^{\hat{0}}\epsilon \\ &= \gamma^i D_i\epsilon + \frac{1}{2}K\gamma^{\hat{0}}\epsilon = 0.\end{aligned} \tag{7.103}$$

更に左から $\gamma^{\hat{1}}$ を作用させて，D_i を動径方向とそれに垂直な 2 次元面とに分解し

$$D_{\hat{1}}\epsilon + \gamma^{\hat{1}}\gamma^{\hat{A}}\mathcal{D}_A\epsilon + \frac{1}{2}k\epsilon + \frac{1}{2}K\gamma^{\hat{1}}\gamma^{\hat{0}}\epsilon = 0 \tag{7.104}$$

となる．この式と式 (7.102) を用いて，式 (7.100) は次のように書き直すことができる．

[*19] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, G. T. Horowitz and M. J. Perry, Commun. Math. Phys. **88**, 295 (1983).

$$\int_H \epsilon^\dagger \Big(D_{\hat{1}}\epsilon + \frac{1}{2} K_{\hat{1}\hat{i}} \gamma^{\hat{i}} \gamma^{\hat{0}} \epsilon \Big) dS + \mathrm{c.c.}$$
$$= \int_H \epsilon^\dagger \Big(-\frac{1}{2} k\epsilon - \frac{1}{2} K \gamma^{\hat{1}} \gamma^{\hat{0}} + \frac{1}{2} K_{\hat{1}\hat{1}} \gamma^{\hat{1}} \gamma^{\hat{0}} \epsilon - \gamma^{\hat{1}} \gamma^{\hat{A}} \mathcal{D}_{\hat{A}} \epsilon + \frac{1}{2} K_{\hat{1}\hat{A}} \gamma^{\hat{A}} \gamma^{\hat{0}} \epsilon \Big) dS + \mathrm{c.c.}. \tag{7.105}$$

ここで最後の 2 項のみを取り出して

$$\phi := \int_H \epsilon^\dagger \Big(-\gamma^{\hat{1}} \gamma^{\hat{A}} \mathcal{D}_{\hat{A}} \epsilon + \frac{1}{2} K_{\hat{1}\hat{A}} \gamma^{\hat{A}} \gamma^{\hat{0}} \epsilon \Big) dS \tag{7.106}$$

と定義する．今スピノールに対して条件式 (7.101) を課してみよう．すると簡単な計算から ϕ が純虚数であることが示される．従って，その複素共役部分との和はネスターテンソルのホライズン上での積分には寄与しないことが分かる．結局，式 (7.100) で残るのは

$$2 \int_H \epsilon^\dagger \Big(-k - K + K_{\hat{1}\hat{1}} \Big) \epsilon dS \tag{7.107}$$

である．ここで見かけのホライズン上で

$$-k - K + K_{\hat{1}\hat{1}} = 0 \tag{7.108}$$

が成り立つことを思い出すと（式 (7.32) 参照)，式 (7.107) がゼロとなる．以上よりブラックホールが存在する時空でもエネルギーの正定値性は示せた．まとめておくと，

定理（ブラックホール正エネルギー性）：漸近的に平坦なブラックホール時空において，そのエネルギーは非負である．

ウィッテンスピノールが存在することさえ示すことができれば，これらの正エネルギー定理の漸近的に平坦な高次元時空への拡張は容易である．

いずれの場合にも，ウイッテン方程式の解の存在は正則な時空，あるいは時間一定面上に対してのみ保証されている．そのため，この正エネルギー定理は宇宙検閲仮設を保証するものではないことに注意する．

7.5.3 ペンローズ不等式

時空にブラックホールが存在する場合，より強い不等式をある特殊な場合に得ることができる．そのために時間一定面として外的曲率がゼロ，即ち $K_{ij} = 0$ を満たすものを考えよう．すると，見かけのホライズン上で時間一定面内の見かけのホライズンの外的曲率のトレース k はゼロとなる（式 (7.32) 参照)．

$$k = 0. \tag{7.109}$$

ここで逆曲率流で得た結果を用いてみることにしよう．まず

$$\frac{d}{dy}(f(y)S^{1/2}(y)) \geq 0 \tag{7.110}$$

を見かけのホライズンから遠方まで積分することを考える．

$$f(\infty)S^{1/2}(\infty) \geq f(y_H)S_H^{1/2}. \tag{7.111}$$

ここで見かけのホライズンの位置を $y = y_H$ とし，そこでの面積を $S_H = S(y_H)$ とした．見かけのホライズン上で $k = 0$，つまり $f(y_H) = 16\pi$ となることと質量との関係 $GM = f(\infty)S^{1/2}(\infty)/64\pi^{3/2}$ を用いて，すこし書き直すと

$$4\pi(2GM)^2 \geq S_H \tag{7.112}$$

が得られる．これが**ペンローズ不等式**である*20．この不等式はペンローズによって提案された予想で，等式が成り立つ場合に限ってシュバルツシルト時空になることが予想された．$K_{ij} = 0$ の超曲面上に限れば，この不等式ならびに等式の場合の予想の正しいことは検証済みである．しかし，$K_{ij} \neq 0$ の超曲面上では角運動量のある系に対応するため，より強い不等式が得られると期待される．

この不等式の意味を考えてみよう．左辺はシュバルツシルトブラックホールの面積になっている．従って，$K_{ij} = 0$ の空間的超曲面上でブラックホールの面積 S_H はシュバルツシルトのものより小さくなっていなければならない．後者が重力の強い領域を表す典型的な面積だと考えれば，ブラックホールがあるような時空ではそれよりも小さくなければならないことは自然である．

本書の範疇を超えるが，事象の地平面の面積がエントロピーに対応しているという予想がある．このペンローズ不等式はエントロピー最大の状態がシュバルツシルト時空に他ならないことを意味している．

7.6 ブラックホールの唯一性定理

重力崩壊の結果としてブラックホールは形成される．ブラックホール形成時は時空は激しく動的であるものの，重力波などの放出吸収により次第に定常時空に落ち着くであろう．回転がなければ静的時空に落ち着くであろう．7.4.3 節で触れたように，定常時空では事象の地平面は見かけの地平面と一致する．

第 3 章でアインシュタイン方程式のブラックホール解をいくつか紹介した．その中で漸近的に平坦な 4 次元時空において，静的あるいは定常ブラックホール解の唯一性が成り立つことが分かっている（**唯一性定理**）．静的な場合は外側で正則な解はシュバルツシルト時空，定常な場合はカー時空に限られるのである．本節ではその証明の概略を紹介しよう．

7.6.1 静的な場合：イスラエルによる証明

まずイスラエルによる証明から始めよう*21．

---

*20 なお，ここでの議論は高次元を拡張することはできない．

*21 W. Israel, Phys. Rev. **164**, 1776 (1967).

時空が静的であるとは，静的時間的なキリングベクトルが存在し，それに垂直な積分多様体が存在する場合をいう．このとき静的な時空の計量はある時間座標 t が存在し

$$ds^2 = -V^2(x^i)dt^2 + g_{ij}(x^k)dx^i dx^j \tag{7.113}$$

と書ける．このときキリングベクトルは

$$\xi = \partial_t \tag{7.114}$$

で与えられる．このキリングベクトルは $t=$ 一定面に垂直であり，V や空間の計量 g_{ij} は t に依存しない．このような計量を静的であるというのである．この計量に対して，リッチテンソルを計算しておくと

$$R_{00} = VD_iD^iV, \tag{7.115}$$

$$R_{ij} = {}^{(3)}R_{ij} - \frac{1}{V}D_iD_jV = 0, \tag{7.116}$$

$$R_{i0} = 0 \tag{7.117}$$

となる．ここで D_i は g_{ij} の共変微分である．さて，真空のアインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{7.118}$$

であるから，非自明な方程式は $(0,0)$ 成分と (i,j) 成分から与えられる．

$$D_iD^iV = 0, \tag{7.119}$$

$${}^{(3)}R_{ij} = \frac{1}{V}D_iD_jV. \tag{7.120}$$

これらを満足する解でブラックホールを表すものはシュバルツシルト時空だけであること，即ち唯一性定理をイスラエルに従って示す．そのためにはまず時空の無限遠方での境界条件を特定しておく．

$$V = 1 - \frac{Gm}{r} + O(1/r^2), \tag{7.121}$$

$$g_{ij} = \left[1 + \frac{2Gm}{r} + O(1/r^2)\right]\delta_{ij}. \tag{7.122}$$

以後，$G=1$ とする．

本小節の目標はブラックホールが球対称になることを示すことである．そのために動径座標のようなものを導入し，その座標一定面すべてが球対称になることを示すことを考える．ここでは V をその座標とし，$V=$ 一定面の単位法線ベクトルを

$$n_a = \rho D_a V \tag{7.123}$$

と書くことにしよう．ここで ρ は n_a が法線ベクトルであることから

$$\rho = (D_iVD^iV)^{-1/2} \tag{7.124}$$

と書ける．すると，$V=$ 一定面上の計量は

$$h_{ij} = g_{ij} - n_i n_j \tag{7.125}$$

で与えられる．$V=$ 一定面の外的曲率 k_{ij} は

$$k_{ij} = h_i^k D_k n_j \tag{7.126}$$

で定義される．このトレース部分を計算しておくと

$$\begin{aligned} k = h^{ij} k_{ij} &= D_i n^i \\ &= D_i(\rho D^i V) \\ &= \rho D_i D^i V + D_i \rho D^i V \\ &= \rho^{-1} n^i D_i \rho \end{aligned} \tag{7.127}$$

となる．3 行目から 4 行目に移る際に，式 (7.119) と $n^i = g^{ij} n_j = \rho D^i V$ であることを用いた．

アインシュタイン方程式から直ちに分かることがある．式 (7.120) のトレースをとり，式 (7.119) を用いると

$$^{(3)}R = \frac{1}{V} D_i D^i V = 0 \tag{7.128}$$

となる．3 次元リッチスカラーがゼロとなるのである．

証明するにあたって，次の 3 つの式が鍵を握ることになる．

$$D_i\left(\frac{n^i}{\rho}\right) = 0, \tag{7.129}$$

$$D_i\left(\frac{kn^i}{\rho^{1/2}V}\right) = -\frac{1}{V\rho}\left[\tilde{k}_{ij}\tilde{k}^{ij} + \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\mathcal{D}_i\rho\mathcal{D}^i\rho + 2\mathcal{D}_i\mathcal{D}^i\rho^{1/2}\right], \tag{7.130}$$

$$\begin{aligned} D_i\left[\frac{n^i}{\rho}\left(kV + \frac{4}{\rho}\right)\right] = \frac{V}{\rho}\Big(&-{}^{(2)}R - 2\tilde{k}_{ij}\tilde{k}^{ij} - \rho^{-2}\mathcal{D}_i\rho\mathcal{D}^i\rho \\ &- \mathcal{D}_i\mathcal{D}^i \ln\rho\Big). \end{aligned} \tag{7.131}$$

ここで $\tilde{k}_{ij}$ は k_{ij} のトレースレス部分である．

$$\tilde{k}_{ij} = k_{ij} - \frac{1}{2} h_{ij} k. \tag{7.132}$$

$\mathcal{D}_i$ は h_{ij} の共変微分である．これらの導出は本小節の最後に行う．また，あとで使う重要な二つの式も導出なしに書いておく．

$$\begin{aligned} R_{abcd}R^{abcd} = {}&{}^{(3)}R_{ijkl}{}^{(3)}R_{ijkl} \\ &+ \frac{4}{\rho^2 V^2}\left[k_{ij}k^{ij} + k^2 + 2\rho^{-2}\mathcal{D}_i\rho\mathcal{D}^i\rho\right], \end{aligned} \tag{7.133}$$

$$^{(2)}R = k^2 - k_{ij}k^{ij} + \frac{2k}{V\rho}. \tag{7.134}$$

これで証明の準備が整った．まず，事象の地平面（の時間一定面による断面）H 上で式 (7.133) を眺めてみよう．H 上で $V=0$ であるが，分母の寄与から

このままでは曲率は発散してしまう．なぜなら分子はすべて非負の項だからである．従って H が正則であるためには，分子のすべての項がゼロになる必要がある．即ち

$$k_{ij}|_{V=0} = \mathcal{D}_i\rho|_{V=0} = 0. \tag{7.135}$$

これらの最初の式は，$V=0$ 面が全測地的であることを意味している．また，第2式より ρ は H 上で定数であることが分かる．そして，これらの式を式 (7.134) に適用すると

$$\frac{k}{V}|_{V=0} = \frac{1}{2}\rho_0{}^{(2)}R|_{V=0}. \tag{7.136}$$

これらの式は後で使う．ここで $\rho_0 = \rho|_H$．

次に式 (7.129) から式 (7.131) までの体積積分を行おう．まず，式 (7.129) の積分から考えよう．すると

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Sigma D_a\left(\frac{n^a}{\rho}\right)d\Sigma \\ &= \int_{S_\infty}\frac{dS}{\rho} - \int_{S_H}\frac{dS}{\rho}. \end{aligned} \tag{7.137}$$

第1行の第1項を評価するために，ρ と k の遠方での振る舞いを明記しておこう．

$$\rho \simeq V'^{-1} \simeq r^2/m, \quad k \simeq 2/r. \tag{7.138}$$

ここで r は無限遠方での動径座標である．これらは漸近条件から決まる．すると，上の式の右辺は評価することできて，移行すると

$$4\pi m = \frac{S_0}{\rho_0} \tag{7.139}$$

となる．ここで $S_0 = S|_H$．次に式 (7.130) の体積積分を考えてみよう．すると

$$\begin{aligned} &\int_{S_\infty}\frac{k}{V\rho^{1/2}}dS - \int_H \frac{k}{V\rho^{1/2}}dS \\ &\quad = -\int_\Sigma \frac{d\Sigma}{V\rho}\left[\rho^{1/2}\tilde{k}_{ij}\tilde{k}^{ij} + \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\mathcal{D}_i\rho\mathcal{D}^i\rho\right] \end{aligned} \tag{7.140}$$

となる．ここで

$$\int_\Sigma \frac{d\Sigma}{\rho V}\mathcal{D}^2\rho^{1/2} = \int_0^1 dV\frac{1}{V}\int_{S_V} dS\mathcal{D}^2\rho^{1/2} = 0 \tag{7.141}$$

であることを用いている．S_V は $V=$ 一定面である．式 (7.140) の右辺は非負である．左辺の第1項を評価すると

$$\int_{S_\infty}\frac{k}{V\rho^{1/2}}dS = \lim_{r\to\infty}\frac{2}{r}\frac{1}{r/m^{1/2}}4\pi r^2 = 8\pi m^{1/2} \tag{7.142}$$

となる．第2項を評価する際には式 (7.136) を用いる．その結果

$$\int_H \frac{k}{V\rho^{1/2}}dS = \frac{\rho_0^{1/2}}{2}\int_H {}^{(2)}RdS = 4\pi\rho_0^{1/2} \tag{7.143}$$

となる．ここで事象の地平面のトポロジーが2次元球面であることから得られる

$$\int_H {}^{(2)}RdS = 8\pi \tag{7.144}$$

を用いている．以上を合わせると次の不等式を得る．

$$\rho_0 \le 4m. \tag{7.145}$$

等号が成り立つのはすべての $V=$ 一定面上で $\tilde{k}_{ij} = \mathcal{D}_i\rho = 0$ が成り立つ場合に限ることに注意する．最後に式 (7.131) の体積積分を考えよう．

$$\int_{S_\infty} \frac{dS}{\rho}\Big(kV + \frac{4}{\rho}\Big) - \int_H \frac{dS}{\rho}\Big(kV + \frac{4}{\rho}\Big) + \int_\Sigma h^{1/2}V{}^{(2)}RdV \le 0. \tag{7.146}$$

今度は体積積分が残っていることに注意する．左辺第1項，第2項をこれまで通り評価し（実は第1項からの寄与はない），再び $\int_{S_V} {}^{(2)}RdS = 8\pi$ であることを用いると第3項は V についての初等積分となるため，結局

$$-\frac{4S_0}{\rho_0^2} + 4\pi \le 0. \tag{7.147}$$

これをすこし変形すると

$$\pi\rho_0^2 \le S_0 \tag{7.148}$$

を得る．

等式 (7.139) を用いて，不等式 (7.145), (7.148) の ρ_0 を S_0 と M を用いて書き直すと，前者は

$$S_0 \le 16\pi^2 m^2. \tag{7.149}$$

後者は，その逆の

$$S_0 \ge 16\pi^2 m^2 \tag{7.150}$$

となる[*22]．従って，これらの二つの不等式から等式が成り立つことが分かる．等式が成り立つ場合は，すべての $V=$ 一定面上で

$$\tilde{k}_{ij} = \mathcal{D}_i\rho = 0 \tag{7.151}$$

が成り立つ場合に限る．この条件を満たす面は球対称となる．そして静的球対称真空解はシュバルツシルト解になることは第3章で示した．よって次の定理を得ることができた．

定理（4次元シュバルツシルト時空の唯一性）：漸近的に平坦で静的かつ真空のブラックホール解はシュバルツシルト解のみである．

---

*22 実は前者の不等式は次の節で述べるペンローズ不等式そのものである．

証明の過程でコメントをいくつか．この証明ではいたずらに議論が長くなることを避けるために明記しなかったがブラックホールは一つだけであることが仮定されている．実はこの問題は次の小節で説明するように解決済みである．むろん直観的には複数個ブラックホールが存在すればその間に引力が働き静的ではあり得ない．従って，そのような場合を排除することを証明の仮定として置いてもさほど不自然ではない．そうではあるが，証明できることにこしたことはない．その証明は幾分非自明な方法で証明できる（7.6.2 節参照）．

次に次元に関するコメント．イスラエルの証明ではガウス・ボネの定理が用いられている．この定理は 2 次元面，つまり時空が 4 次元に対してのみ成り立つ．従って高次元時空における拡張ができない．

最後に仮定の「真空」についてコメント．この仮定は緩めることができる．系にはさらに電磁場が存在する場合，そのブラックホール解がライシュナー・ノルドシュトローム解になることを示すことができる．ただし，$m > |Q|$ を満足する場合に限る．またエネルギー条件を満たすスカラー場が存在できないことが示される．スカラー場の毛はそれ単独では存在できない．なお，より一般の物質を想定すると途端に証明に行きづまる．例えば，完全流体が存在する場合，証明が破綻する．むろん，エネルギー条件を満足する流体ならば，ブラックホールとその流体素片の間に引力が働き静的状態を保ちえないと考えられ，そのような流体はブラックホールの外に存在できないと思われる．しかし，数学的証明は 2012 年現在存在していない．

この小節の最後に証明の際に用いた重要な式の導出を行っておこう．

式 (7.129) の導出：$D_i n^i = \rho^{-1} n^i D_i \rho$ から直ちに分かる．

式 (7.130), (7.131) の導出：まず後の計算のために $D_i D_j V$ を外的曲率 k_{ij} などで書いてみよう．

$$
\begin{aligned}
D_i D_j V &= D_i(\rho^{-1} n_j) \\
&= \rho^{-1} k_{ij} - \rho^{-1} k n_i n_j - \rho^{-2}(n_i \mathcal{D}_j \rho + n_j \mathcal{D}_i \rho)
\end{aligned}
\tag{7.152}
$$

となる．また，ガウスコダッチ分解のガウス方程式（式 (4.18)）を用いると

$$
\begin{aligned}
{}^{(2)}R &= h^{ik} h^{jl\,(3)} R_{ijkl} + k^2 - k_{ij} k^{ij} \\
&= {}^{(3)}R - 2^{(3)} R_{ij} n^i n^j + k^2 - k_{ij} k^{ij} \\
&= -\frac{2}{V} D_i D_j V n^i n^j + k^2 - k_{ij} k^{ij} \\
&= \frac{2k}{V\rho} + k^2 - k_{ij} k^{ij}
\end{aligned}
\tag{7.153}
$$

が得られる．3 行目から 4 行目へは式 (7.152) を用いた．

本題に戻ろう．式 (4.40) を今の場合に当てはめると（$\epsilon = 1, K_{ab} \to k_{ij}, D_a \to$

$\mathcal{D}_i$ など)

$$\pounds_n k_{ij} = 2k_{ik}k_j^k - kk_{ij} - \rho^{-1}\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j\rho + {}^{(2)}R_{ij} - h_i^k h_j^l {}^{(3)}R_{kl} \tag{7.154}$$

を得る．h^{ij} でトレースをとると

$$\begin{aligned} n^i D_i k &= -k^2 - \rho^{-1}\mathcal{D}^2\rho + {}^{(2)}R - h^{ij\,(3)}R_{ij} \\ &= -k_{ij}k^{ij} - \rho^{-1}\mathcal{D}^2\rho + \frac{k}{\rho V} \end{aligned} \tag{7.155}$$

となる．ここで $h^{ij\,(3)}R_{ij} = -V^{-1}n^i n^j D_i D_j V = k/\rho V$ となることと式 (7.153) を用いた．これを用いて，$D_i(kn^i/\rho^{1/2}V)$ を計算すると式 (7.130) を得る．同様に式 (7.131) を示すことができる．

式 (7.133) の導出：まず

$$\begin{aligned} R_{abcd}R^{abcd} &= R_{ijkl}R^{ijkl} + 4R_{i0j0}R^{i0j0} \\ &= R_{ijkl}R^{ijkl} + \frac{1}{V^2}D_i D_j V D^i D^j V \end{aligned} \tag{7.156}$$

となることに注意する．ここで $R_{ijkl} = {}^{(3)}R_{ijkl}$，$R_{i0j0} = VD_iD_jV$ となることを用いている．式 (7.152) を用いて整理すれば式 (7.133) を示すことができる．なお，3 次元のリーマンテンソルはリッチテンソルとスカラーで書けるため，$R_{ijkl}R^{ijkl}$ も $k_{ij}, \mathcal{D}_i\rho$ で書けることが分かるが重要ではないので割愛する．

7.6.2 静的な場合：正質量定理を用いた方法

静的な場合，$D\ (\geq 4)$ 次元でも可能な別証明がある．次の定理が成り立つ[*23]．

定理（高次元シュバルツシルト時空の唯一性）：漸近的に平坦で真空静的なブラックホール解は高次元シュバルツシルト解に限られる．

4 次元の場合と同様に真空のアインシュタイン方程式から

$$D_i D^i V = 0, \tag{7.157}$$

$${}^{(D-1)}R_{ij} = \frac{1}{V}D_i D_j V \tag{7.158}$$

が成り立つ．2 番目式のトレースをとり，1 番目の式を用いると

$${}^{(D-1)}R = 0 \tag{7.159}$$

が成り立つ．

D 次元の球対称真空解は

---

*23 最初に文献「S. Hwang, Geometriase Dedicata **71**, 5 (1988)」で示された．これとは独立にギボンズ・井田・筆者によって示された [G. W. Gibbons, D. Ida and T. Shiromizu, Prog. Theor. Phys. Suppl. **148**, 284 (2003)]．ここでの議論は後者に従っている．

$$
\begin{aligned}
da^2 &= -\Big(1-\frac{2m}{r^{D-3}}\Big)dt^2+\Big(1-\frac{2m}{r^{D-3}}\Big)^{-1}dr^2+r^2d\Omega_{D-2}^2 \\
&= \left[\frac{1-\frac{m}{2\rho^{D-3}}}{1+\frac{m}{2\rho^{D-3}}}\right]^2 dt^2+\Big(1+\frac{m}{2\rho^{D-3}}\Big)^{4/(D-3)}\delta_{ij}dx^idx^j
\end{aligned}
\tag{7.160}
$$

であった．ここで ρ は等方座標 x^i を使って $\rho:=\sqrt{\delta_{ij}x^ix^j}$ で，r と ρ の関係は

$$
r=\rho\Big(1+\frac{m}{2\rho^{D-3}}\Big)^{2/(D-3)} \tag{7.161}
$$

である．高次元の場合，漸近的に平坦で静的な真空ブラックホール解が上記の解に限られることを示す．前小節で述べたように，イスラエルの証明は高次元では使えない．そこでまったく異なる戦略をとる．詳細は後で述べることとして，その概略についてみてみよう．まず，時間一定面をうまく共形変換を行い，変換後の空間の ADM エネルギーがゼロとなり，そのリッチスカラーが非負となるようにする．そのようにできるかどうか非自明であるが，結論から言えばできる．すると正質量定理から，その変換後の空間は平坦であることが分かる．また共形変換の共形因子から平坦な空間上の調和関数を作ることができる．そして事象の地平面に対応する $D-2$ 次元面が球対称であることが示される．結果として，問題は球対称な境界を持つソースのない静電ポテンシャルの問題に帰着される．このポテンシャルの等高面が球対称になることは自明であろう．よって，時空は静的で球対称になり，そのブラックホール解は高次元シュバルツシルト解になることが分かる．

以下では詳しくみてみることにしよう．正質量定理を応用するために，V を用いて次の二つの共形変換を考える．

$$
\tilde{g}_{ij}^{\pm}=\Omega_{\pm}^2 g_{ij}. \tag{7.162}
$$

ここで

$$
\Omega_{\pm}=\Big(\frac{1\pm V}{2}\Big)^{2/(D-3)} \tag{7.163}
$$

である．この共形変換によって二つの異なる多様体 $(\tilde{\Sigma}_{\pm},\tilde{g}_{ij}^{\pm})$ を得ることができた[*24]．

さて，まず正質量定理の応用を念頭に置いて $(\tilde{\Sigma}_{\pm},\tilde{g}_{ij}^{\pm})$ の各々のリッチスカラーを計算してみよう．すると

$$
\Omega_{\pm}^2\,{}^{(D-1)}\tilde{R}_{\pm}={}^{(D-1)}R_{\pm}\mp\frac{4(D-2)}{D-3}\frac{D_iD^iV}{1\pm V}=0 \tag{7.164}
$$

[*24] なぜ唐突に二つの多様体を構成したか気になる読者もいるであろう．正質量定理を適用するためには，その証明から系の境界は遠方だけでなければならない．事象の地平面がある場合は正質量性は示されるが，質量がゼロの場合の平坦性を示すことができない．今の証明では質量がゼロの場合の正質量定理を使いたい．なお，変換前の $V=0$ 面は事象の地平面であったが，変換後の $V=0$ は事象の地平面ではない．二つ多様体を用意したのは，それらを $V=0$ で張り合わせるなどの工夫を行って境界を遠方だけにしたいからである．うまく正質量定理が適用できるようになっているので，すこし我慢して先を読み進めてほしい．

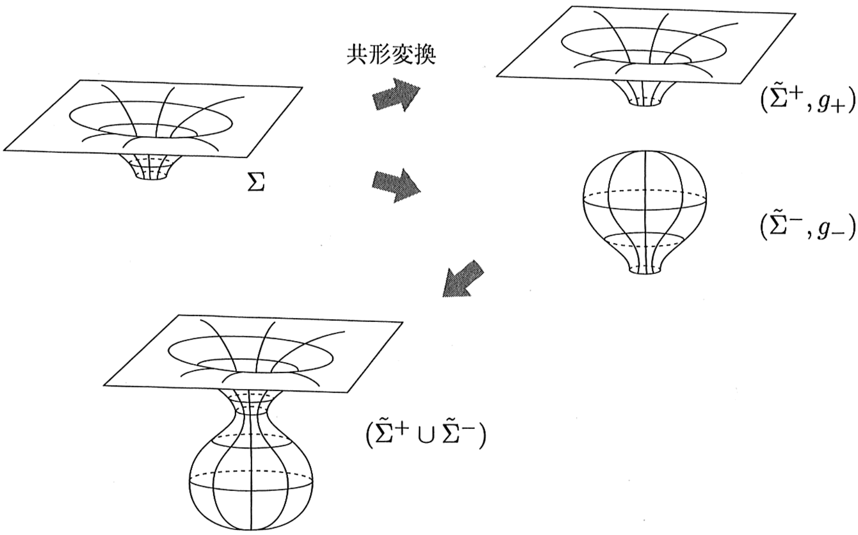


図 7.7 共形変換と張り合わせ.

とゼロになることが分かる．ここで真空のアインシュタイン方程式を用いた．

次に，変換前の遠方に対応する領域での計量の振る舞いを調べてみよう．まずは $\tilde{g}^+_{ij}$ の漸近的な振る舞いは

$$\tilde{g}^+_{ij} \simeq \delta_{ij} + O(1/r^{D-2}) \tag{7.165}$$

となる．ここで $1/r^{D-3}$ とふるまう質量による項が存在しないことに注意する．つまり，$(\tilde{\Sigma}_+, \tilde{g}^+_{ij})$ 上では質量はゼロとなっている．では $(\tilde{\Sigma}_-, \tilde{g}^-_{ij})$ はどうだろうか．簡単な計算から

$$\tilde{g}^-_{ij} dx^i dx^j \simeq (m/2)^{4/(D-3)} (1/r^4)(dr^2 + r^2 d\Omega^2_{D-2}) \tag{7.166}$$

となる．そこで $R = r^{-1}$ で定義される新しい動径座標 R を用いると

$$\tilde{g}^-_{ij} dx^i dx^j \simeq (m/2)^{4/(D-3)} (dR^2 + R^2 d\Omega^2_{D-2}) \tag{7.167}$$

となり，(Σ, g_{ij}) の遠方 $(r = \infty)$ は変換後に正則な空間の 1 点 $(R = 0)$ に対応していることが分かった．$R = 0$ の点を p と名付けておこう．

ここで二つの多様体を $V = 0$ で張り合わせることができることを確認する．まず計量 $\tilde{g}^\pm_{ij}$ の値が $V = 0$ で一致することは容易に分かるであろう．問題は外的曲率 l_{ij} の連続性である．そのために再び $V = 0$ での正則性から導かれる性質について調べる．もとの空間 (Σ, g_{ij}) に戻って，その計量を $V = 0$ 近傍で

$$g_{ij} dx^i dx^j = \rho^2 dV^2 + h_{AB} dx^A dx^B \tag{7.168}$$

と書いておこう．するとイスラエルの証明の場合と同じ計算から

$$
\begin{aligned}
{}^{(D)}R_{abcd}{}^{(D)}R^{abcd} &= {}^{(D-1)}R_{ijkl}{}^{(D-1)}R^{ijkl} + 4{}^{(D)}R_{0i0j}{}^{(D)}R^{0i0j} \\
&= {}^{(D-1)}R_{ijkl}{}^{(D-1)}R^{ijkl} \\
&\quad + \frac{4}{V^2\rho^2}[k_{AB}k^{AB} + k^2 + 2\rho^{-2}h^{AB}\partial_A\rho\partial_B\rho]
\end{aligned}
\tag{7.169}
$$

となる．従って $V=0$ での正則性から

$$
k_{AB}|_{V=0} = \partial_A\rho_{V=0} = 0 \tag{7.170}
$$

が示される．よって共形変換後の $V=$ 一定面の外的曲率は

$$
\begin{aligned}
l^{\pm}_{AB} &= \frac{1}{2}\Omega_{\pm}^{-1}\rho^{-1}\partial_V(\Omega_{\pm}^2 h_{AB}) \\
&= \rho^{-1}\partial_V\Omega_{\pm}h_{AB} + \Omega_{\pm}k_{AB}
\end{aligned}
\tag{7.171}
$$

であるから，$V=0$ 上で

$$
l^{\pm}_{AB}|_{V=0} = \rho_0^{-1}\partial_V\Omega_{\pm}h_{AB}|_{V=0} \tag{7.172}
$$

となる．ここで $\partial_V\Omega_+|_{V=0} = -\partial_V\Omega_-|_{V=0}$ となっていることに注意する．すると結局

$$
l^{+}_{AB}|_{V=0} = -l^{-}_{AB}|_{V=0} \tag{7.173}
$$

が成り立っている．符号の違いは具合がよい．なぜなら V の向きが $\tilde{\Sigma}_+$ 側と $\tilde{\Sigma}_-$ 側で異なるからである．前者の V の増える向きを外向きと定めれば，$\tilde{\Sigma}_+$ と $\tilde{\Sigma}_-$ を $V=0$ で張り合わせ，さらに点 p を加えた空間 $\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}_+ \cup \tilde{\Sigma}_- \cup \{p\}$ において，$\tilde{\Sigma}^-$ 側における V の向きは反対の内向きになっている．この向きの違いがちょうど符号の違いに対応しており，$\tilde{\Sigma}^-$ での向きを逆に取り直して外的曲率を定義し直せば，$V=0$ 上でお互いの外的曲率の値も一致している．外的曲率のとびがないということは，$D-1$ 次元リッチテンソルにもとびがないことを保障する．証明から明らかであるが，このようなとびがないような空間に対して正質量定理は適用可能である．以上長くなったが，$(\tilde{\Sigma}, \tilde{g}_{ij})$ のリッチスカラーはいたるところゼロで，しかも ADM 質量はゼロである．また，正質量定理が適用できる空間となっている．よって，空間 $(\tilde{\Sigma}, \tilde{g}_{ij})$ が平坦であることが分かった．従って，変換前の (Σ, g_{ij}) は共形平坦である．

さて，物事を考えるのは平坦な空間上で考えるのが分かりやすい．特に，次のことに気が付くことが重要である．関数 V から

$$
v = \frac{2}{1+V} \tag{7.174}
$$

で定義される v は，変換後の平坦な空間の調和関数であること，即ち

$$
\Delta v = 0 \tag{7.175}
$$

を満たしていることが簡単な計算から分かる．Δ は平坦空間のラプラシアンで

ある．また，もとの空間の事象の地平面に対応する面 $v = 2$ の外的曲率が

$$l_{AB}|_{v=2} = \mathrm{const} \times \tilde{h}_{AB} \tag{7.176}$$

を満たしている．平坦な空間内で外的曲率が上のような性質を満たす面は球面に限られることが知られている．v を静電ポテンシャルに見立てると，境界が $(D-2)$ 次元球面で，ソースのない静電ポテンシャルを求める問題と同じである．すると，等ポテンシャル面も球対称になることは容易に理解できる．共形因子が V にのみ依存していることを考慮すれば，元の空間も球対称である．従って球対称真空なアインシュタイン方程式を解く問題に帰着できた．その解が高次元シュバルツシルト解に限られることはすでに知っている．証明終わり．

ここで紹介した証明は 4 次元の場合も適用される．もともと正質量定理を用いた 4 次元シュバルツシルト解の唯一性の証明では[*25]，共形平坦性を示した後でリンドブロムの定理「真空で共形平坦な 3 次元空間は球対称である」を用いていた．この定理の証明では 4 次元時空の特殊性が使われていた．しかし，この問題はここで紹介されているように克服された．

このタイプの証明は電磁場がある場合で極限ブラックホールでない場合に限り，高次元ライシュナー・ノルドシュトローム解が唯一であることが示されている．また，ディラトンと呼ばれるスカラー場と電磁場が存在する場合でも，**ギボンズ・前田解**[*26] の唯一性を示すことができる[*27]．

7.6.3 定常な場合

これまで回転していないブラックホールについて唯一性の証明の紹介を行ってきた．しかし，実際の天体の重力崩壊では回転を伴うのが自然である．回転している定常ブラックホール解はカーによって発見されたものはあるが，それ以外にも 1972 年に発見された**冨松・佐藤解**がある[*28]．後者は裸の特異点が存在するため，現実の時空を記述しているとは考えにくい．ではカー時空が定常ブラックホール解で許される唯一の解であろうか？ 他に解は存在しないのであろうか？ 答えは次の定理としてまとめられる．

定理（カー時空の唯一性）：漸近的に平坦で真空定常な 4 次元ブラックホール時空はカー解に限られる．

[*25] G. L. Bunting and A. K. M. Masood-ul-Alam, Gen. Rel. Grav. **19**, 147 (1987).

[*26] G. W. Gibbons and K. i. Maeda, Nucl. Phys. B **298**, 741 (1988).

[*27] G. W. Gibbons, D. Ida and T. Shiromizu, Phys. Rev. D **66**, 044010 (2002).

[*28] この解は当時の相対論研究を志す日本人の学生に大きな影響を与え，日本における本格的な相対論研究者育成に繋がった．また，解が裸の特異点を持つものの，非線形方程式のソリトン解の系統的解法の発展に大きな影響を与えた．唯一性定理のおかげで 4 次元時空において系統的解法で発見される解はことごとく特異であったが，21 世紀に入って 5 次元ブラックホール解の生成に大いに役立った．

この証明には二段階ある．まず，剛性と呼ばれる性質で，「定常ならば軸対称」であることを示す．この剛性が一旦示されると，4 次元のアインシュタイン方程式は 2 次元の偏微分方程式の解の唯一性を示す問題に帰着される．境界条件は事象の地平面と無限遠方でしかるべく与えられる．上手な変数の取り方によって，異なる二つの解があると仮定して導かれた関係式から，実は異なる解は等しくなければならないことが示される．以上が証明の概略である．以下で剛性についてもうすこし詳細な内容を見てみることにしよう．

定常なブラックホール時空の事象の地平面の性質を調べることからはじめよう．定常であるから面積は変化しない．従って，事象の地平面を張る光的測地線束の膨張率はゼロとなる．

$$\hat{\theta}|_H = 0. \tag{7.177}$$

するとライチャウドゥリ方程式から

$$\hat{\sigma}_{ab}|_H = R_{ab}k^a k^b|_H = 0 \tag{7.178}$$

が成り立つ．k^a は光的測地線の接ベクトルである．ここで $\hat{\omega}_{ab} = 0$ の光的測地線束を用いた．

$\hat{\theta}_H = \hat{\sigma}_{ab}|_H = 0$ は，事象の地平面の断面の計量を h_{ab} とすると

$$\pounds_k h_{ab}|_H = 0 \tag{7.179}$$

を意味する．つまり，k^a が事象の地平面上でキリングベクトルとなっている．一方で静的でない定常な時空において定常キリングベクトル場 ξ^a は，エルゴ領域の存在で事象の地平面において空間的に張り付くことになる．よって，事象の地平面上にはその光的測地線束の方向と別にキリングベクトル場 ξ^a がある．これらの線形結合をうまくとれば，閉じた軌道を持つキリングベクトル ϕ^a が構成できる．仮にそれらの関係を

$$k^a = \xi^a + \Omega_H \phi^a \tag{7.180}$$

と書いておこう．ここで Ω_H は事象の地平面の一定角速度である．この時点で ϕ^a は事象の地平面上だけでその存在が示されている．真空のアインシュタイン方程式を使うと

$$\pounds_n \cdots \pounds_n \pounds_k g_{ab}|_H = 0 \tag{7.181}$$

であることが結論される．ここで n^a は外側向きのベクトル．事象の地平面の外側全域で ϕ^a が存在することを示すことが分かった．この ϕ^a の存在により時空が軸対称であることが示された．以上で真空定常でエルゴ領域が存在するブラックホール時空が軸対称になることを示すことができた（**時空の剛性**）．

剛性が示されることによって，アインシュタイン方程式は 2 次元の偏微分方程式の解の唯一性を示す問題に帰着される．その詳細は割愛する．

高次元時空においても，次の剛性定理は示されている*29.

定理（高次元剛性定理）：漸近的に平坦で定常真空なブラックホール時空には，少なくとも一つ軸対称なキリングベクトルが存在する.

しかし，キリングベクトルの数が時空の次元の数に対して少ないために唯一性を示すことができない．また，同じ質量や角運動量を持つ異なる解が5次元時空では多数見つかっているため，高次元ブラックホールでは4次元と同じ意味での唯一性は成り立っていない．高次元ブラックオブジェクトの研究はまだまだ始まったばかりである.

*29 ホーランズ・石橋・ウォルトらによって証明された [S. Hollands, A. Ishibashi and R. M. Wald, Commun. Math. Phys. **271**, 699 (2007)]．電磁場がある場合にも拡張できる.

参考文献

上級者向けの教科書として，

[1] R. M. Wald: *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).

[2] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis: *Large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).

[3] 小玉英雄、佐藤文隆：『一般相対性理論』(岩波講座現代の物理学)(岩波書店，1992).

最前線の研究に役立つ研究者のためのハンドブックとして，

[4] E. Poisson: *A Relativist's Toolkit* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).

中級者向けの教科書としては，

[5] ランダウ・リフシッツ:『場の古典論』(ランダウ=リフシッツ理論物理学教程)(東京図書，1978).

[6] 佐々木節:『一般相対論』(産業図書，1996).

[7] 小玉英雄:『相対性理論』(物理学基礎シリーズ)(培風館，1997).

[8] 内山龍雄:『一般相対性理論』(裳華房 物理学選書 15)(裳華房，1987).

[9] 冨田 憲二:『相対性理論』(パリティ物理学コース) (丸善，1990).

初級者向けの教科書としては，

[10] 佐藤勝彦:『相対性理論』(岩波基礎物理シリーズ)(岩波書店，1996).

[11] 須藤靖:『一般相対論入門』(日本評論社，2005)、『もう一つの一般相対論入門』(日本評論社，2010).

[12] 内山龍雄:『相対性理論』(物理テキストシリーズ 8)(岩波書店，1987).

[13] 杉山直:『相対性理論』(講談社基礎物理シリーズ)(講談社，2010).

出版は古いが「電話帳」と呼ばれていて，辞書替わりに使える含蓄のある名著は，

[14] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler: *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).

解析力学と同時に相対性理論を学べる教科書としては，例えば，

[15] 早田次郎：『現代物理のための解析力学』(SGC ライブラリ)(サイエンス社，2006).

索　引

ア

カ

サ

タ

者略歴

白水 徹也（しろみず てつや）

.991 年 山口大学理学部物理学科卒業
.996 年 京都大学大学院理学研究科物理学第二専攻修了
博士（理学）
東京大学大学院理学系研究科物理学専攻助手，
同研究科附属ビッグバン宇宙国際研究センター助手，
東京工業大学大学院理工学研究科基礎物理学専攻 助教授／准教授
!005 年 第 20 回西宮湯川記念賞
!006 年 平成 18 年度 文部科学大臣表彰若手科学者賞
!008 年 京都大学大学院理学研究科物理学・宇宙物理学専攻 准教授
專門分野 相対論，宇宙論

主要著書

DOJIN 選書 026「宇宙の謎に挑む ブレーンワールド」化学同人，2009 年．

臨時別冊・数理科学SGCライブラリ - 90

『アインシュタイン方程式 一般相対性理論のよりよい理解のために』

著 者 白水 徹也

2012 年 5 月25日 初版発行

数理科学編集部 発行人 木 下 敏 孝

TEL.(03)5474–8816

FAX.(03)5474–8817

ホームページ http://www.saiensu.co.jp

ご意見・ご要望は sk@saiensu.co.jp まで．

表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 © 株式会社 サ イ エ ン ス 社 TEL.(03)5474–8500(代表)

〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25 振替 00170–7–2387 (03)5474–8600(広告部)

組版 ビーカム

印刷 (株) シナノ 中澤 眞

製本 (株) 関川製本所 関川安博